

Exercice complémentaire 5.0 : Amortisseur hydraulique

On considère un amortisseur constitué d'un piston de rayon $R = 20$ mm et de longueur $L = 20$ mm couissant dans un cylindre de rayon $R + a$, avec $a = 0.1$ mm. Ce cylindre est rempli d'une huile de viscosité dynamique $\mu = 0.1$ Pa.s.

On veut déterminer la relation entre la force F appliquée sur le piston et sa vitesse V par rapport au cylindre. Le fluide dans les deux chambres supérieure et inférieure au piston sera considéré au repos. L'écoulement, dans l'interstice (le jeu) entre les parois latérales du piston et du cylindre, est visqueux (newtonien), stationnaire et établi. Il sera approximé *localement* par l'écoulement établi entre deux plaques planes distantes de a , de longueur L , de largeur $2\pi R$ (périmètre *déroulé*). On considérera que les pressions p_i et p_a dans les chambres inférieure et supérieure sont uniformes, et que la contribution hydrostatique, d'ordre $\rho g L$, est négligeable devant $p_i - p_a$.

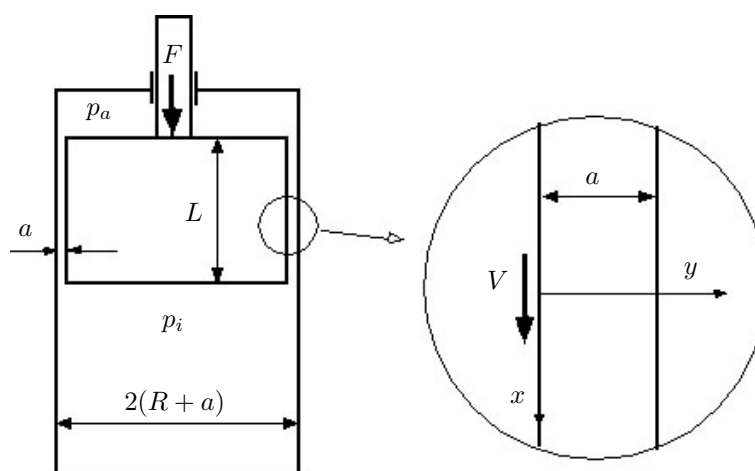


FIGURE 1 – Schéma de l'amortisseur hydraulique.

1. On suppose un écoulement parallèle stationnaire décrit en coordonnées cylindriques par $\vec{u} = u(r)\vec{e}_x$ et un champ de pression $p(x)$. À partir des équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques (Formulaire, section D.2), Ecrire l'équation différentielle vérifiée par $u(r)$.

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0;$$

2. Par analyse des ordres de grandeurs des termes de l'équation, montrez que si $a \ll R_1$ le terme de courbure apparaissant dans la partie visqueuse peut être négligé, et qu'après le changement de variable $y = r - R_1$ l'équation se simplifie en :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

L'ordre de grandeur du terme $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ est $[U]/a^2$ et celui du terme $\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$ est $[u]/(R_1 a)$, le rapport des deux est $a/R_1 \ll 1$, on peut donc négliger le second.

Qu'en déduit-on sur la pression et son gradient suivant x ?

En dérivant la première équation selon x on a $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$. La pression est une fonction linéaire de x et son gradient est constant.

3. Établir l'expression du profil de vitesse $u(y)$ et montrer qu'il correspond à la somme d'un écoulement de Poiseuille proportionnel à $-\partial p/\partial x$ et d'un écoulement de Couette proportionnel à V .

En intégrant deux fois selon y et en tenant compte des conditions limites $u(0) = V$ et $u(a) = 0$, on trouve :

$$u(y) = V \cdot \left(1 - \frac{y}{a} \right) + \frac{a^2}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y}{a} \left(1 - \frac{y}{a} \right)$$

On reconnaît un écoulement de Couette et un écoulement de Poiseuille.

4. Calculez le débit de volume (en m^3/s) à travers l'interstice. On distinguera la contribution Q_p associée à l'écoulement de Poiseuille et la contribution Q_c associée à l'écoulement de Couette. Ce débit (compté du bas vers le haut) vaut :

$$Q = - \int_R^{R+a} u(r) r dr d\theta \approx -2\pi R \int_0^a u(y) dy = Q_c + Q_p$$

$$\text{avec } Q_c = -\frac{2\pi R V a}{2}; \quad Q_p = -\frac{2\pi R a^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

5. Montrer que le débit de volume (en m^3/s) chassé par le piston est égal à $Q = \pi R^2 V$.
 Au cours d'un instant dt le piston chasse un volume $dV = \pi R^2 V dt$ vers le haut, le débit volumique est donc $Q = dV/dt = \pi R^2 V$.
6. En déduire que le gradient de pression est donné (à l'ordre dominant) par $(p_i - p_a)/L = 6\mu R V/a^3$.
 On justifiera au passage que le débit associé à l'écoulement de Couette est négligeable devant celui associé à l'écoulement de Poiseuille.

On écrit maintenant $Q = Q_p + Q_c$, ce qui conduit à :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{6\mu R V}{a^3} \left(1 + \frac{a}{R}\right) \approx \frac{6\mu R V}{a^3}$$

Le terme négligé a/R correspond effectivement au rapport Q_c/Q .

7. Montrez que la force exercée sur le piston se compose de trois termes, notés respectivement F_p (résultante des efforts de pression), $F_{v,c}$ (résultante des contraintes visqueuses associées à l'écoulement de Couette), et $F_{v,p}$ (résultante des contraintes visqueuses associées à l'écoulement de Poiseuille).
 Exprimez F_p , $F_{v,c}$ et $F_{v,p}$ en fonction des données du problème.

$$\vec{F} = \int_S (-p\vec{n} + \tau \cdot \vec{n}) dS$$

En projetant selon l'axe x on a $F = F_p + F_{v,c} + F_{v,p}$ avec respectivement :

$$F_p = 6\pi\mu V L \frac{R^3}{a^3}; \quad F_{v,p} = 12\pi\mu L V R^2/a^2; \quad F_{v,c} = 2\pi\mu L V R/a.$$

8. Comparez l'ordre de grandeur de ces trois forces, et montrez qu'à l'ordre dominant la force totale a pour expression $F = 6\pi\mu V L \frac{R^3}{a^3}$.
 C'est la contribution F_p qui domine.
9. Application : Quelle force faut-il appliquer pour imprimer une vitesse de $1cm/s$ au piston ? L'écoulement est-il laminaire ?
 $F = 3 \cdot 10^3 N$, force équivalant à 300 kg ! Le Reynolds est de l'ordre de la centaine, l'écoulement reste donc laminaire.