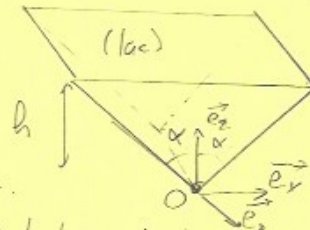


Exercice complémentaire 2.0 : Barrage triangulaire (correction)

Exercice préparatoire Thème 2 "Hydrostatique"

2.0 Barrage triangulaire



1. $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \Rightarrow p(z) = -\rho g z + cte.$

On choisit l'origine du repère à la base du barrage

$\Rightarrow p(h) = p_{atm} \Rightarrow cte = p_{atm} + \rho g h$

$\Rightarrow \boxed{p(z) = p_{atm} + \rho g (h - z)}$

2. Force exercée par l'eau :

$\vec{R}_{eau \rightarrow B} = \iint_S p \vec{n}_{eau \rightarrow B} dS.$

* $\vec{n}_{eau \rightarrow B} = \vec{e}_x$

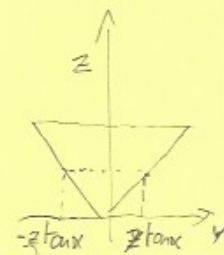
* paramétrage de la surface : $\begin{cases} 0 \leq z \leq h \\ -z \tan \alpha \leq y \leq z \tan \alpha \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{R}_{eau \rightarrow B} = \int_0^h \left(\int_{-z \tan \alpha}^{z \tan \alpha} (p_{atm} + \rho g (h - z)) dy \right) dz \vec{e}_x$

Δ ordre des intégrales : les bornes de $\int dy$ dépendent de z
 $\Rightarrow$ il faut l'évaluer en premier

$$\begin{aligned} \vec{R}_{eau \rightarrow B} &= \int_0^h \left((p_{atm} + \rho g (h - z)) \cdot 2z \tan \alpha \right) dz \vec{e}_x \\ &= \left[(p_{atm} + \rho g h) \tan \alpha \cdot \frac{z^2}{2} - \rho g \tan \alpha \frac{z^3}{3} \right]_0^h \vec{e}_x \\ &= \left\{ p_{atm} \cdot \frac{h^2 \tan \alpha}{2} + \frac{\rho g h^3 \tan \alpha}{3} \right\} \vec{e}_x \end{aligned}$$

$S = \text{surface du barrage} = h^2 \tan \alpha$



de même $\vec{R}_{\text{air} \rightarrow B} = \iint_S p_{\text{air}} \vec{n}_{\text{air} \rightarrow B} dS$; $\vec{n}_{\text{air} \rightarrow B} = -\vec{e}_z$
(par simplification négligeons l'épaisseur du barrage)

$$\vec{R}_{\text{air}} = (\rho_{\text{air}} \cdot h^2 \tan x) (-\vec{e}_z).$$

$$\text{Finalement } \boxed{\vec{R}_{\text{(fluides)} \rightarrow B} = \frac{\rho g h^3 \tan x}{3} \vec{e}_z = \frac{1}{3} \rho g h S \vec{e}_z}$$

3. Moment de la force

$$\vec{M}_0 = \iint_S \vec{OM} \wedge p_{\text{eau}} \cdot \vec{n}_{\text{eau} \rightarrow B} dS + \iint_S \vec{OM} \wedge p_{\text{air}} \cdot \vec{n}_{\text{air} \rightarrow B} dS$$

(évaluons d'abord le moment total exercé par (air + eau))

$$\vec{M}_0 = \iint_S \vec{OM} \wedge [p_{\text{eau}} - p_{\text{air}}] \vec{e}_z dS \quad \vec{OM} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ par } M \in S.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_{0x} = 0; \\ M_{0y} = \int_0^h \int_{-z \tan x}^{z \tan x} \rho g (h-z) z dy dz = \int_0^h \rho g (h-z) z (2z \tan x) dz = \frac{\rho g \tan x h^4}{6} \\ M_{0z} = \int_0^h \int_{-z \tan x}^{z \tan x} \rho g (h-z) \cdot y dy dz = \int_0^h \rho g (h-z) \left(\int_{-z \tan x}^{z \tan x} y dy \right) dz = 0 \end{cases}$$

posons $\vec{M}_0 = \begin{bmatrix} M_{0x} \\ M_{0y} \\ M_{0z} \end{bmatrix}$

$$\text{Finalement } \boxed{\vec{M}_0 = \frac{\rho g \tan x h^4}{6} \vec{e}_y}$$

4 cherchons le point $C = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$ tq $\vec{M}_0 = \vec{OC} \wedge \vec{R}$

$$\text{Soit } \begin{cases} 0 = y_c \times 0 - z_c \times 0 \\ \frac{\rho g \tan x h^4}{6} = z_c \times \left(\frac{1}{3} \rho g h^3 \tan x \right) - x_c \times 0 \\ 0 = x_c \times 0 - y_c \times \left(\frac{1}{3} \rho g h^3 \tan x \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_c = \frac{h}{2} ; y_c = 0, x_c \text{ indéterminé}} \quad \text{(normal car ce point n'est pas unique.)}$$