

Exercice complémentaire 11.0 : Relations de saut à travers un choc droit

1. (a) Bilan intégral de masse :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho dV = - \oint_{\partial\Omega} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS$$

$$\Rightarrow 0 = \rho_1 u_1 A_1 - \rho_2 u_2 A_2$$

D'où

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (1)$$

(b) Bilan intégral de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{u} dV = - \oint_{\partial\Omega} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS - \oint_{\partial\Omega} p \vec{n} dS$$

$$\Rightarrow 0 = \rho_1 u_1^2 A_1 - \rho_2 u_2^2 A_2 + p_1 A_1 - p_2 A_2$$

D'où

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (2)$$

(c) Bilan intégral d'énergie :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) dV &= - \oint_{\partial\Omega} \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) \vec{u} \cdot \vec{n} dS + \oint_{\partial\Omega} -p \vec{n} \cdot \vec{u} dS + \dot{W}^{v,ext} + \dot{Q}^{ext} \\ \Rightarrow \oint_{\partial\Omega} \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho} \right) \vec{u} \cdot \vec{n} dS &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \rho_1 u_1 A_1 \left(e_1 + \frac{1}{2} u_1^2 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) - \rho_2 u_2 A_2 \left(e_2 + \frac{1}{2} u_2^2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right) = 0$$

$$\text{Or } \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \text{ et } A_1 = A_2 \Rightarrow e_1 + \frac{1}{2} u_1^2 + \frac{p_1}{\rho_1} = e_2 + \frac{1}{2} u_2^2 + \frac{p_2}{\rho_2}$$

avec enthalpie spécifique $h = e + p/\rho = C_p T$:

$$C_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = C_p T_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad (3)$$

(d) Equation d'état du gaz parfait :

$$p = \rho r T \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \left(\frac{T_2}{T_1} \right) \quad (4)$$

2. On part de l'équation pour l'énergie (3) :

$$C_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = C_p T_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

avec

$$C_p T + \frac{u^2}{2} = C_p T \left(1 + \frac{u^2}{2 C_p T} \right) = C_p T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u^2}{\gamma r T} \right) = C_p T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

car $\gamma r T = c^2$ et $C_p = \gamma r / (\gamma - 1)$, d'où :

$$C_p T_1 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right) = C_p T_2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2 \right)$$

On en déduit la première relation de saut :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_2^2} \quad (5)$$

3. On part de l'équation pour la quantité de mouvement (2) :

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2$$

avec

$$p + \rho u^2 = p \left(1 + \frac{\rho}{p} u^2 \right) = p \left(1 + \gamma \frac{\rho}{\gamma p} u^2 \right) = p (1 + \gamma M^2)$$

car $\gamma p / \rho = c^2$, d'où :

$$p_1 (1 + \gamma M_1^2) = p_2 (1 + \gamma M_2^2)$$

On en déduit la deuxième relation de saut :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \quad (6)$$

4. On part de l'équation pour la masse (1) :

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$$

d'où

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{M_1 c_1}{M_2 c_2} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

car $c = \sqrt{\gamma r T}$: on en déduit les troisième et quatrième relations de saut :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2}} \quad (7)$$

5. Reste à déterminer M_2 en fonction de $M_1 \dots$

On part de l'équation d'état du gaz parfait (4) , dans laquelle on injecte les expressions trouvées précédemment.

$$\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2}} \times \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_2^2} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_2^2}}$$

En élevant au carré :

$$\left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2 = \frac{M_1^2}{M_2^2} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_2^2} \right)$$

6. On peut mettre cette relation sous la forme d'un polynôme du second degré pour la variable $X = M_2^2$, sous la forme suivante :

$$\left[\gamma^2 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{(1 + \gamma M_1^2)^2}{M_1^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)} \right] X^2 + \left[2\gamma - \frac{(1 + \gamma M_1^2)^2}{M_1^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)} \right] X + 1 = 0$$

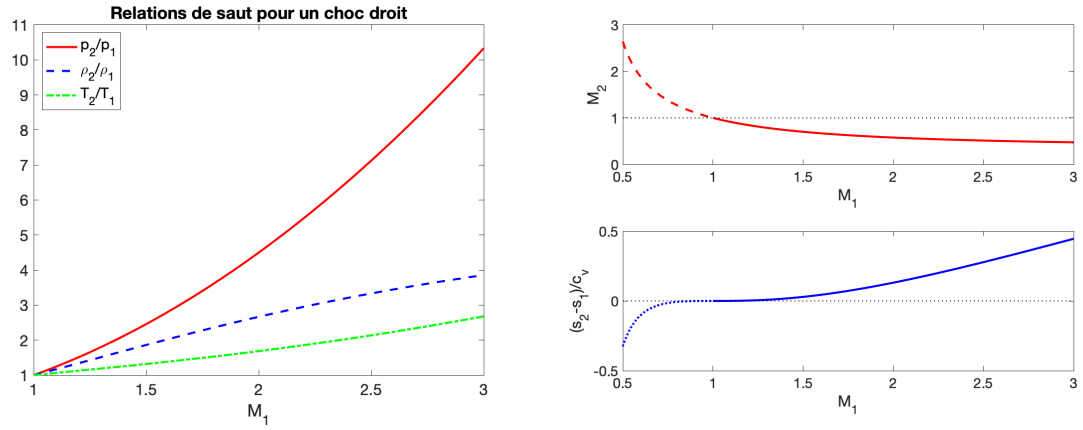


FIGURE 1 – A gauche : saut de pression, masse volumique, température en fonction de M_1 . A droite : Nombre de Mach aval M_2 et saut d'entropie ; les parties en pointillés des courbes correspondent à la solution "anticipoc" non physique.

qu'on peut aussi écrire classiquement $aX^2 + bX + c = 0$. On peut alors se lancer dans le calcul du discriminant (bon courage...) ou plus simplement remarquer que le produit des deux racines est $-c/a$ et que la relation de départ admet une racine évidente $M_2 = M_1$ c'est-à-dire $X = M_1^2$.

On en déduit que l'autre racine non triviale est $X = -\frac{c}{aM_1^2}$, soit après simplification :

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma} \quad (8)$$

7. En remplaçant l'expression de M_2 en fonction de M_1 dans les équations de saut obtenues précédemment, on obtient :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1)^2 M_1^2} (2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma) \quad (9)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) \quad (10)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} \quad (11)$$

$$\frac{u_2}{u_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{-1} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1)M_1^2} \quad (12)$$

8. On pourra consulter le programme `ChocDroit.m` sur le site web du cours. La figure ci-dessus représente les résultats générés par ce programme.