

Exercice complémentaire 12.0 : Régimes d'écoulement dans une tuyère.

Eléments de correction

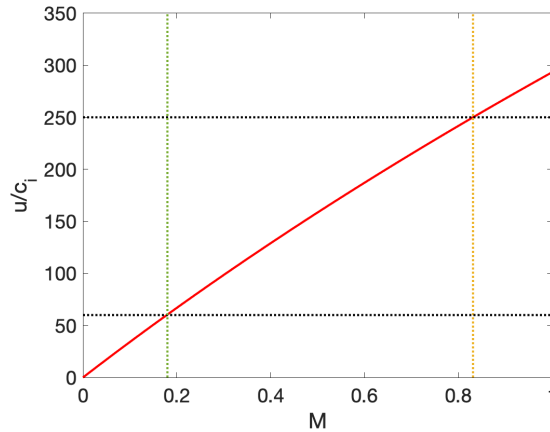


FIGURE 1 – fonction $u_c = f(M)$ de la question 1.

Régime 1

1. Cherchons une relation entre T_i et la vitesse u en un point donné de la tuyère, permettant de déterminer le nombre de mach local $M = u/c$. On peut exploiter la 1ère relation de St Venant :

$$\frac{T}{T_i} = \frac{c^2}{c_i^2} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-1}$$

On a donc :

$$u = Mc = \frac{Mc_i}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{1/2}} \equiv f(M).$$

avec $c_i = \sqrt{\gamma r T_i} = 375 \text{ m/s}$ la vitesse du son dans les conditions génératrices.

On cherche la valeur M_c telle que $f(M_c) = 250 \text{ m/s}$. On peut chercher la solution en traçant la fonction $f(M)$. Le programme Matlab donne cette solution (voir figure). On trouve finalement :

$$M_c = 0.831.$$

On en déduit la température au col : $T_c = \sqrt{\frac{c_c}{\gamma r}} = \sqrt{\frac{u_c}{M_c \gamma r}} = 268 \text{ K}$.

Remarque : On peut aussi utiliser le tableau de valeur du formulaire, donnant $U^* = u/c_i$ en fonction de Mach, mais celui-ci n'est pas précis car le tableau de valeur a été établi pour $T_i = 288 \text{ K}$.

2. L'écoulement est forcément subsonique dans le convergent (car accéléré à partir d'une vitesse initiale supposée négligeable). Au col il est également subsonique. Donc la tuyère n'est pas amorcée : dans le divergent l'écoulement ralentit et reste subsonique.
3. Exploitions la première relation de St Venant :

$$\frac{T_s}{T_i} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_s^2\right)^{-1}$$

qui s'inverse en :

$$M_s = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left(\frac{T_i}{T_s} - 1\right)}$$

Avec les données de l'énoncé on trouve $M_c = 0.18$.

4. On va exploiter maintenant la seconde relation de St Venant :

$$\frac{P_s}{P_i} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_s^2\right)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}}$$

Avec les données de l'énoncé ($P_a = 1atm = 1013hPa$), on trouve $P_i = 1036hPa$.

On déduit finalement la masse volumique à partir de l'équation d'état :

$$\rho_i = P_i/(RT_i) = 1.203kg/m^3.$$

5. A partir de la relation établie à la question 1 et de la figure : $u_s = 60m/s$.

La masse volumique en sortie peut être déterminée par la 3e relation de St Venant, ou par l'équation d'état : $\rho_s = 1.184kg/m^3$.

La section de sortie vaut $A_s = \pi D_s^2/4 = 19.6cm^2$.

On en déduit finalement le débit : $\dot{m} = A_s \rho_s u_s = 0.139kg/s$.

Régime 2

6. Puisque l'écoulement en sortie est supersonique, c'est qu'il est supersonique dans tout le divergent. Il ne peut être sonique qu'au niveau du col, et est forcément subsonique dans le convergent.

7. Exploitions les relations de St Venant, en appliquant les formules, ou en lisant les valeurs correspondant à la ligne $M = 1.5$ dans le tableau du formulaire. On lit :

$$P_s/P_i = 0.2719 \quad \Rightarrow \quad P_i = 3726hPa.$$

$$T_s/T_i = 0.2719 \quad \Rightarrow \quad T_i = 431K.$$

$$\rho_i = \frac{P_i}{RT_i} = 3.01kg/m^3.$$

8. D'après la relation de St Venant : $T_c = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_c^2\right)^{-1} T_i$ avec ici $M_c = 1$. c.a.d. $T_c = 358K$.

9. La relation (4) du formulaire donne A/A_c en fonction de M . On peut de nouveau utiliser le tableau de valeurs pour lire directement dans la ligne $M = 1.5$: $A/A_c = 1.1756$.

On en déduit alors $A_c = 16.68cm^2$, soit un diamètre de $D_c = \sqrt{4A_c/\pi} = 4.6cm$.

10. Le débit peut être calculé en fonction des données au col, $\dot{m} = A_c \rho_c u_c$. On a $u_c = c_c = \sqrt{\gamma r T_c} = 380m/s$, et $\rho_c = 0.643\rho_i$ (d'après le tableau de valeurs pour la ligne $M = M_c = 1$, soit $\rho_c = 1.937kg/m^3$).

L'application numérique donne finalement : $\dot{m} = 5.815kg/s$.

Régime 3 :

11. $P_2/P_1 = 1.4601 \quad \Rightarrow \quad P_2 = 1478hPa$.

$$T_2/T_1 = 1.3237 \quad \Rightarrow \quad T_2 = 570K.$$

$$M_2 = 0.701.$$

NB : ce régime de fonctionnement n'est pas possible si la pression ambiante est la pression atmosphérique, car le choc conduirait à une remontée de pression à une pression supérieure à la pression ambiante. En revanche il est possible si le moteur fusée fonctionne dans une atmosphère à plus haute pression (sur Vénus ?)