

## Exercice complémentaire chapitre Cinématique : écoulements linéaires (correction)

### 1 Ecoulements linéaires

1. Le tenseur des gradients des vitesses a pour composantes  $L_{ij} = u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  (cf. cours de MMC).

Soit :

$$\vec{\vec{L}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme  $u_z = 0$  et  $\frac{\partial}{\partial z} = 0$  et dans le cas présent d'un écoulement plan, la dernière colonne et la dernière ligne du tenseur sont nécessairement nulles. On peut donc se restreindre à un tenseur représenté par la matrice  $2 \times 2$  constituée des deux premières lignes et colonnes du tenseur complet :

.....  $\vec{\vec{L}} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$

La divergence s'en déduit par .....  $\text{div}(\vec{u}) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = \text{Tr}(\vec{\vec{L}}) = 0.$

Les parties symétriques et antisymétriques de  $\vec{\vec{L}}$  sont :  $\vec{\vec{D}} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\vec{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Comme  $\text{div } \vec{u} = 0$ , par définition il existe une fonction courant  $\psi(x, y)$  vérifiant :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u_x = \alpha y \tag{1}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -u_y = -\alpha x \tag{2}$$

En intégrant la première équation par rapport à  $y$  (à  $x$  fixé) on obtient :

$$\psi(x, y) = \alpha y^2/2 + F(x)$$

où  $F(x)$  est une "constante d'intégration" (par rapport à  $y$ ) qui est dans le cas général une fonction de  $x$ . En dérivant cette deuxième expression et en identifiant avec la relation précédente :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = F'(x) = -\alpha x$$

On en déduit  $F(x) = -\alpha x^2/2 + C^{te}$ . Soit au final :  $\psi = \alpha(y^2/2 - x^2/2) + C^{te}$

Les lignes de courant sont des courbes d'équation  $y^2 - x^2 = C^{te}$ . Ce sont des branches d'hyperbole.

3. La trajectoire  $\vec{X}(t)$  d'une particule fluide se définit à partir de la relation  $\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{u}(\vec{X}, t)$  (cf. cours MMC). C'est-à-dire :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} &= \alpha Y, \\ \frac{dY}{dt} &= \alpha X. \end{cases}$$

En combinant ces deux équations on aboutit à une équation d'ordre 2 :  $\frac{d^2 X}{dt^2} = \alpha^2 X$ . La solution est  $X(t) = A_1 e^{\alpha t} + A_2 e^{-\alpha t}$ . A partir de cette dernière expression et de l'équation liant  $Y(t)$  et  $dX/dt$ , on arrive à :  $Y(t) = A_1 e^{\alpha t} - A_2 e^{-\alpha t}$ . La condition initiale  $[X(0), Y(0)] = [0, L]$  permet de déduire  $A_1 = L/2$ ,  $A_2 = L/2$ . Finalement la trajectoire s'écrit :

$$X(t) = L \sinh(\alpha t); \quad Y(t) = L \cosh(\alpha t)$$

On reconnaît de nouveau la définition paramétrique d'une hyperbole.

4. La projection du champ de vitesse dans les nouveaux axes s'écrit :

$$u'_x = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta = \alpha (y \cos \theta + x \sin \theta);$$

$$u'_y = -u_x \sin \theta + u_y \cos \theta = \alpha (x \cos \theta - y \sin \theta).$$

On va maintenant exprimer les anciennes coordonnées  $(x, y)$  en fonction des nouvelles :

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta; \quad y = x' \sin \theta + y' \cos \theta;$$

En reportant dans l'expression précédente on aboutit à

$$\dots \begin{cases} u_{x'} &= \alpha (2 \cos \theta \sin \theta x' + [\cos^2 \theta - \sin^2 \theta] y') \\ u_{y'} &= \alpha (-2 \cos \theta \sin \theta y' + [\cos^2 \theta - \sin^2 \theta] x') \end{cases}$$

5. On en déduit le tenseur recherché :

$$\dots \boxed{\vec{\vec{L}}_{(x'y')} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & -2 \cos \theta \sin \theta \end{pmatrix}}$$

Remarque : on pourrait obtenir directement ce résultat en utilisant la formule de MMC de changement de repère d'un tenseur :

$$\dots \vec{\vec{L}}_{(x'y')} = \vec{\vec{\Theta}}^{-1} \vec{\vec{L}} \vec{\vec{\Theta}} \quad \text{où } \vec{\vec{\Theta}} \text{ est la matrice de changement de base : } \vec{\vec{\Theta}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

On remarque que pour  $\theta = \pi/4$  le tenseur a pour expression  $\vec{\vec{L}}_{(x'y')} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$ . La matrice représentant le tenseur est diagonale, ce qui veut dire que la base  $[e_{x'}, e_{y'}]$  correspond aux *axes propres* du tenseur.

6. Première méthode :

Dans le cas  $\theta = \pi/4$ , l'expression du champ de vitesse calculée à la question 4 devient :

$$\begin{cases} u_{x'} &= \alpha x' \\ u_{y'} &= -\alpha y' \end{cases} \quad \text{On cherche la fonction } \psi \text{ vérifiant}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y'} = u_{x'} = \alpha x' \tag{3}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x'} = -u_{y'} = \alpha y' \tag{4}$$

Par la même méthode qu'à la question 2, on obtient  $\dots \psi = \alpha x' y' + C^{te}$ .

Deuxième méthode :

On part de l'expression déterminée à la question 2, et on fait le changement de variable :

$$\psi = \frac{\alpha}{2} [(x' \sin \pi/4 + y' \cos \pi/4)^2 - (x' \cos \pi/4 - y' \sin \pi/4)^2] + C^{te} = \frac{\alpha}{2} \left[ \left( \frac{x' + y'}{\sqrt{2}} \right)^2 - \left( \frac{y' - x'}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] + C^{te}$$

Et finalement  $\dots \psi = \alpha x' y' + C^{te}$ .

Les lignes de courant  $\psi = C^{te}$  sont des courbes d'équation  $y = C^{te}/x$ . On reconnaît de nouveau des hyperboles.

7. Le tenseur des gradients des vitesse a pour expression (en considérant de nouveau une matrice  $2 \times 2$ ) :

$$\vec{\vec{L}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Ses parties symétrique et antisymétrique sont

$$\vec{\vec{D}} = \begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{pmatrix}$$

$$\vec{\vec{R}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b-c}{2} \\ \frac{c-b}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

La vorticité est  $\vec{\omega} = (b - c)\vec{e}_z$ .

L'écoulement est *incompressible* si  $a = -d$ ; il est *irrotationnel* si  $b = c$ .

8. (i) Il s'agit de l'écoulement d'étirement pur de la partie précédente, exprimé dans la base  $[\vec{e}_x, \vec{e}_y]$ .  
(ii) Il s'agit du même écoulement, exprimé dans la base  $[\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}]$ .  
(iii) C'est un écoulement de *dilatation pure*.  
(iv) C'est un écoulement de *rotation pure*.  
(v) C'est un écoulement de *cisaillement simple*. Notez que ce cas correspond à la superposition d'une rotation pure et d'un étirement pur.