

Exercice complémentaire 9.0 : Perte de charge singulière a travers un élargissement brusque (CORRECTION).

On introduit un repère cylindrique $(\vec{e}_x, \vec{e}_r, \vec{e}_\phi)$ pour paramétrer le problème.

1. Le bilan intégral de masse sur le volume de contrôle s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \rho dV &= - \oint_{\partial\Omega} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS \\ &= 0 \quad \text{car le fluide est incompressible.} \end{aligned}$$

Sur les parois Σ_1, Σ_2 et Σ_f , le flux de masse est nul (car $\vec{u} = \vec{0}$)

Sur Γ_1 , la vitesse est supposée uniforme et vaut $\vec{u} = u_1 \vec{e}_x$; la normale sortante est $\vec{n} = -\vec{e}_x$.

Sur Γ_2 , la vitesse est supposée uniforme et vaut $\vec{u} = u_2 \vec{e}_x$; la normale sortante est $\vec{n} = +\vec{e}_x$.

Le bilan de masse se réécrit donc :

$$0 = - \left(\int_{\Gamma_1} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS + \int_{\Gamma_2} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS \right) = \rho u_1 S_1 - \rho u_2 S_2.$$

On en déduit :

$$u_2 = \frac{u_1 S_1}{S_2} = s u_1$$

- Le bilan de masse entre la section d'entrée et la section immédiatement avant la contraction conduirait de même à u'_1 . La pression p'_1 est en réalité légèrement inférieure à p_1 en raison des pertes de charges régulières dans la canalisation. Cependant ces pertes de charges régulières ne sont pas prises en compte ici car on veut caractériser uniquement la perte de charge singulière à l'élargissement (les pertes de charges régulières sont importantes sur une longueur de canalisation L grande devant son diamètre, ici on s'intéresse à un volume de contrôle supposé de dimension comparable au diamètre).
- Si l'on s'intéresse à l'écoulement immédiatement en aval de la contraction, on constate que les lignes de courant sont parallèles. dans la direction transverse la vitesse varie entre les valeurs $\vec{u} = u_1 \vec{e}_x$ et la valeur $\vec{u} \approx \vec{0}$ dans la zone de recirculation, et le rayon de courbure des lignes de courant est infini. D'après le corollaire de la relation de Coanda vue en cours, le gradient de pression dans la direction transverse est nul. On en déduit que $p' \approx p'_1 = p_1$ dans la zone de recirculation.
- Le bilan intégral de quantité de mouvement s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \rho \vec{u} dV &= - \oint_{\partial\Omega} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS - \oint_{\partial\Omega} (-p \vec{n}) dS + \oint_{\partial\Omega} (\vec{\tau} \cdot \vec{n}) dS \\ &= \vec{0} \quad \text{car l'écoulement est en régime stationnaire.} \end{aligned}$$

C'est une relation vectorielle. En la projetant selon $\vec{e}_x$ on obtient la relation scalaire plus simple suivante :

$$0 = - \oint_{\partial\Omega} \rho (\vec{u} \cdot \vec{e}_x) (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS + \oint_{\partial\Omega} -p (\vec{n} \cdot \vec{e}_x) dS + \oint_{\partial\Omega} (\vec{\tau} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{e}_x dS$$

Détaillons de nouveau les contributions de chacune des portions de la frontière $\partial\Omega$:

- La première intégrale correspondant au flux convectif de quantité de mouvement est nulle sur les parois Σ_1, Σ_2 et Σ_f (car $\vec{u} = \vec{0}$ sur celles-ci. En revanche il faut la garder sur les frontières Γ_1 et Γ_2).
- La seconde intégrale correspondant à la force de pression est nulle sur les parois latérales Σ_1 et Σ_2 (car $\vec{n} = \vec{e}_r$ donc $\vec{n} \cdot \vec{e}_x = 0$). En revanche il faut la garder sur les frontières Γ_1, Γ_2 et Σ_f .
- La troisième intégrale correspondant à la force de frottement visqueux est nulle sur Γ_1 et Γ_2 (car sur celles-ci $(\vec{\tau} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{e}_x = \pm \tau_{xx}$ avec $\tau_{xx} = 2\mu D_{xx} = 2\mu \partial u_x / \partial x$, et l'écoulement est supposé uniforme en amont et en aval, c.a.d. $\partial u_x / \partial x = 0$). Sur les parois Σ_1 et Σ_2 , on a $(\vec{\tau} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{e}_x = \tau_{xr} = \mu (\partial u_r / \partial x + \partial u_x / \partial r)$. La contrainte visqueuse τ_{xr} n'est pas nulle car le cisaillement $\partial u_x / \partial r$ est important dans la couche limite. Cependant, comme expliqué plus haut, ce frottement contribue à la perte de charge régulière dans la canalisation, qui n'est pas

pris en compte ici, puisqu'on s'intéresse uniquement à la perte de charge singulière. Enfin la force visqueuse sera négligée sur la surface frontale Σ_f car l'écoulement est supposé de faible amplitude dans la zone de recirculation. Au final on va donc négliger la force de frottement visqueux sur l'ensemble des frontières.

Le bilan de quantité de mouvement se réécrit donc :

$$0 = - \oint_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \rho(\vec{u} \cdot \vec{e}_x) (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS + \oint_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Sigma_f} -p(\vec{n} \cdot \vec{e}_x) dS$$

Ce qui conduit à :

$$\rho u_1^2 S_1 - \rho u_2^2 S_2 + p_1 S_1 - p_2 S_2 + p'_1 (S_2 - S_1) = 0$$

5. La relation précédente se réécrit, en divisant par S_2 et en notant que $p'_1 = p_1$:

$$p_1 - p_2 = \rho u_2^2 + \rho u_1 (S_1/S_2)$$

En notant que $u_2 = u_1 S_1/S_2$ comme vu à la question 1, on arrive à :

$$p_1 - p_2 = \rho u_1^2 (s^2 - s) \quad \text{avec } s = S_1/S_2.$$

6. Pour obtenir la perte de charge, il faut ajouter à l'expression précédente la variation d'énergie cinétique qui vaut $\rho u_1^2/2 - \rho u_2^2/2 = \rho u_1^2/2(1 - s^2)$. On a donc :

$$\Delta_1^2 = \rho u_1^2 \left(s^2 - s + \frac{1 - s^2}{2} \right) = \rho u_1^2 \left(\frac{s^2 - 2s + 1}{2} \right) = \frac{\rho u_1^2}{2} (1 - s)^2$$

Le coefficient de perte de charge est donc $K = (1 - s)^2$.

7. Dans le cas où $S_2 \gg S_1$, $s \approx 0$. Donc la perte de pression est $(p_1 - p_2) = 0$, et la perte de charge vaut $\Delta_1^2 = \rho u_1^2/2$.

Si l'on avait négligé l'effet de la dissipation visqueuse, on aurait pu utiliser la relation de Bernoulli qui aurait conduit à $\Delta_1^2 = 0$ et à une variation de pression $p_1 - p_2 = \rho u_2^2/2 - \rho u_1^2/2 = -\rho u_1^2/2$. Ceci signifierait que l'énergie cinétique de l'écoulement amont se transforme intégralement en énergie potentielle de pression, et que donc la pression remonterait.

En réalité la pression reste constante et la perte de charge est égale à l'opposé de l'énergie cinétique de l'écoulement incident. Ceci signifie que la totalité de l'énergie cinétique est dissipée par les frottements turbulents ayant lieu dans le jet.