

Exercice complémentaire 4 : écoulement de Poiseuille (correction)

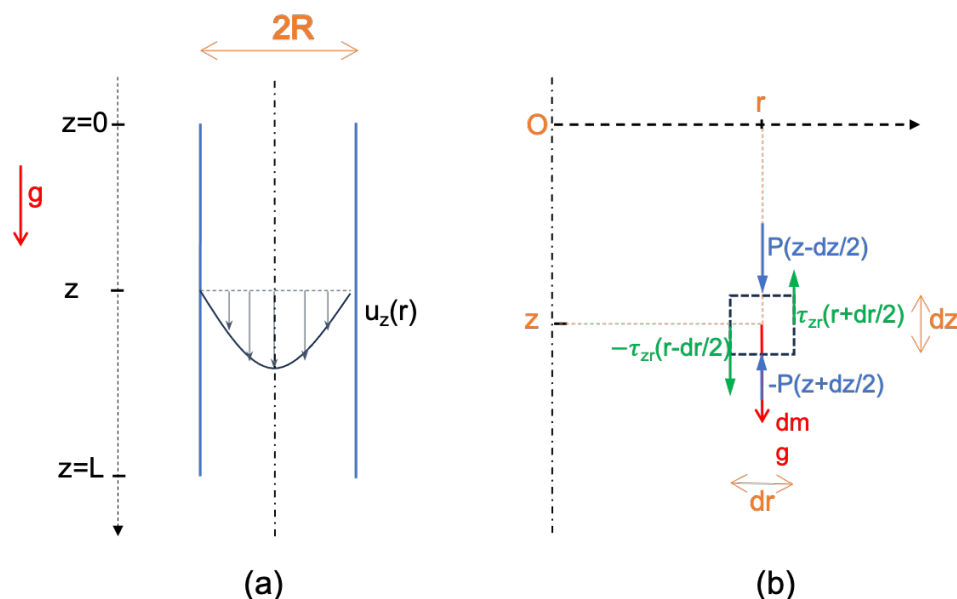


FIGURE 1 – (a) Représentation globale de l'écoulement de Poiseuille vertical; (b) Détail du volume élémentaire et des forces appliquées sur celui-ci.

1. a) La conduite est immobile et les pressions d'entrée et de sortie sont fixées et ne varient donc pas au cours du temps. Aucune condition limite et aucun paramètre du problème ne dépendant du temps (on parle alors d'*invariance temporelle*), il est donc légitime de chercher une solution de même nature : $\vec{u} = \vec{u}(r, \theta, z)$
- b) La conduite est de très grande longueur par rapport au rayon ($R/L \ll 1$). On peut donc modéliser le problème par une conduite supposée géométriquement *infinie* dans la direction z et donc *invariante* dans cette direction. Aucune condition limite et aucun paramètre du problème ne dépendant de z (on parle alors d'*invariance suivant z*), il est donc légitime de chercher une solution de même nature : $\vec{u} = \vec{u}(r, \theta)$
- c) La conduite est supposée parfaitement cylindrique, donc de symétrie de rotation (ou *axi-symétrique*) autour de l'axe Oz . Aucune condition limite et aucun paramètre du problème ne dépendant de θ (on parle alors d'*invariance par rotation autour de l'axe Oz*), il est donc légitime de chercher une solution de même nature : $\vec{u} = \vec{u}(r)$
- d) Le fluide est mis en mouvement par la différence de pression entre l'entrée et la sortie de la conduite. La force associée à ce gradient de pression est dirigée suivant z , et il n'existe pas de force extérieure dans les autres directions. Dans ces conditions, il est naturel de chercher une solution d'écoulement alignée avec cette force motrice suivant z $\vec{u} = u(r) \vec{e}_z$
2. On part de la troisième composante de l'équation de Navier-Stokes (projection dans la direction $\vec{e}_z$) donnée dans le formulaire (section C.2) et on biffe tous les termes non nuls :

$$\underbrace{\frac{\partial u_z}{\partial t}}_{\text{stationnaire}} + \underbrace{u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}}_{u_r = u_\theta = 0} + \underbrace{u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}}_{u_z = u_z(r)} = g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}}_{u_z = u_z(r)} \right]$$

Ce qui conduit bien à :

$$\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \right] = 0. \quad (1)$$

3. On introduit un volume élémentaire $\delta\mathcal{V}$ de dimensions dr, dz et $rd\theta$. Géométriquement cela correspond à un anneau de section carrée, centrée autour du cercle de rayon r dans le plan horizontal à l'altitude z . La figure 1(b) représente une coupe dans le plan méridien $\theta = 0$. Dans cette représentation, ce volume élémentaire est un carré de dimensions dr, dz .

On écrit l'équation de la statique, projetée selon la direction $\vec{e}_z$, en comptabilisant toutes les forces appliquées à ce volume (comme représentées sur la figure).

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_{ext \rightarrow \delta\mathcal{V}} \cdot \vec{e}_z &= \delta m g + [p(z - dz/2) - p(z + dz/2)] 2\pi r dr \\ &+ [\tau_{zr}(r + dz/2)](r + dr/2)dz - [\tau_{zr}(r + dz/2)](r - dr/2)dz \\ &= 0\end{aligned}$$

Dans cette expression, $\delta m = \rho \delta V$ est la masse avec $\delta V = 2\pi r dr dz$ le volume du volume de contrôle. On note que les surfaces sur lesquelles s'appliquent les forces de pression et de frottement visqueux sont respectivement $2\pi r dr$ et $2\pi(r \pm dr/2)dz$.

Remarques sur l'orientation des différentes forces :

- La gravité est dans la direction descendante, qui est ici la direction $+\vec{e}_z$.
- La force de pression s'exerce $\delta\mathcal{V}$ dans la direction normale entrante, elle est bien orientée vers le bas sur la facette du haut et vers le haut sur la facette du bas.
- D'autre part, si les conditions limites sont telles que $P(0) > P(L)$, soit $\partial P/\partial z < 0$, la force exercée sur la facette du haut est plus grande en norme que celle exercée sur la facette du bas.
- Selon la convention introduite en cours, la contrainte τ_{zr} exercée sur une facette de position r , par le demi-espace $r' > r$ sur le demi-espace $r' < r$. La force est donc bien $+\tau_{zr}$ sur la facette de position $r + dr/2$ et $-\tau_{zr}$ sur la facette de position $r - dr/2$.
- Cependant, on verra dans la suite que la contrainte visqueuse τ_{zr} est négative. Ceci peut se comprendre en notant que $\tau_{rz} < 0$ à la position $r = R$, en effet la paroi "freine" l'écoulement fluide et exerce donc une contrainte orientée dans la direction $-\vec{e}_z$. La contrainte étant nulle en $r = 0$ (le cisaillement s'annule sur l'axe de symétrie), on peut donc s'attendre à ce que τ_{rz} soit négative sur l'intervalle $[0, R]$ (ce qui sera confirmé par le calcul dans la suite).

Dans l'équation écrite précédemment, on divise tous les termes par $2\pi r dr dz$, ce qui conduit à :

$$\rho g + \frac{p(z - dz/2) - p(z + dz/2)}{dz} + \frac{[(r + dr/2)\tau_{zr}(r + dz/2)] - [(r - dr/2)\tau_{zr}(r - dr/2)]}{r dr} = 0.$$

On fait tendre dz et dr vers zéro, ce qui conduit à

$$\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{zr})}{\partial r} = 0.$$

il ne reste plus qu'à utiliser la loi rhéologique $\tau_{zr} = \mu \frac{\partial u_z}{\partial r}$ pour arriver à l'expression attendue.

4. On peut partir des composantes selon $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ de l'équation de Navier-Stokes données dans le formulaire. En biffant tous les termes nuls en raison de la nature de l'écoulement, il ne reste plus que $\partial p/\partial r = 0$ et $\partial p/\partial \theta = 0$. Ce qui justifie que la pression ne dépend que de l'altitude : $p = p(z)$. On peut maintenant dériver l'équation 1 par rapport à z . En notant que le seul terme dépendant de z est $\partial p/\partial z$, on arrive à

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0.$$

Ceci veut dire que la pression est une fonction affine de z , de la forme $A + Bz$. Les conditions limites en $z = 0$ et $z = L$ permettent de déterminer les constantes, d'où le résultat attendu.

5. Comme vu plus haut, la composante axiale (suivant $\vec{e}_z$) de l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\dots\dots\dots \frac{dp}{dz} = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \rho g_z$$

6. L'équation (1) à résoudre s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{Gr}{\mu} \Leftrightarrow r \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{Gr^2}{2\mu} + A \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{Gr}{2\mu} + \frac{A}{r} \Leftrightarrow u(r) = -\frac{Gr^2}{4\mu} + A \log(r) + B$$

Les constantes d'intégration A et B sont à déterminer à l'aide des conditions limites.

La vitesse doit être finie sur l'axe $r = 0$: comme $\log(r \rightarrow 0) \rightarrow -\infty$, alors nécessairement $A = 0$.

$$\text{Il y a adhérence à la paroi : } u(r = R) = 0 \Leftrightarrow 0 = -\frac{GR^2}{4\mu} + B \Leftrightarrow B = \frac{GR^2}{4\mu}$$

On en déduit
$$u(r) = \frac{G}{4\mu} (R^2 - r^2) = \frac{GR^2}{4\mu} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] = \frac{R^2}{4\mu} \left[\rho g_z - \frac{dp}{dx} \right] \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

L'écoulement solution, appelé *écoulement de Poiseuille*, correspond donc à un profil de vitesse parabolique.

7. Le débit massique passant à travers la section S de la conduite est donné par

$$\dot{m} = \int_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \int_0^R \rho u(r) 2\pi r dr = \frac{\pi \rho G R^2}{2\mu} \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2} \right) dr = \frac{\pi G R^2}{2\nu} \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4} \right] \text{ car } \mu = \rho \nu$$

soit
$$\dot{m} = \frac{\pi G R^4}{8\nu} = \frac{\pi R^4}{8\nu} \left[\rho g_z - \frac{dp}{dx} \right]$$

En remarquant que pour un fluide homogène $\rho = Cte$:

$$\dot{m} = \int_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \rho \int_S \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \rho q \text{ où } q \text{ correspond au débit volumique à travers la section } S,$$

on en déduit
$$q = \frac{\pi G R^4}{8\mu} = \frac{\pi R^4}{8\mu} \left[\rho g_z - \frac{dp}{dx} \right]$$

La vitesse moyenne est donnée par $U = \frac{1}{S} \int_S \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \frac{q}{S}$

où $S = \pi R^2$ désigne la surface de la section de la conduite, d'où ...
$$U = \frac{G R^2}{8\mu} = \frac{R^2}{8\mu} \left[\rho g_z - \frac{dp}{dx} \right]$$

On remarque que la vitesse maximale se trouve sur l'axe $r = 0$:
$$U_{\max} = \frac{G R^2}{4\mu} = \frac{R^2}{4\mu} \left[\rho g_z - \frac{dp}{dx} \right] = 2U$$

En exprimant G en fonction de U à partir de la relation précédente et en reportant dans l'expression de la question 4, on trouve :
$$u(r) = 2U \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

8. D'après l'expression de la question 4b, on a $G = \frac{P_1 - P_2}{L} + \rho g_z$, en multipliant par L on trouve $GL = P_1 - P_2 + \rho g L = (P_1 + \rho g_z z_1) - (P_2 + \rho g_z z_2)$. D'après la question 6 on peut exprimer G en fonction de U : $G = \frac{8\mu U}{R^2}$.

Donc au final :
$$(P_1 + \rho g_z z_1) - (P_2 + \rho g_z z_2) = L \times \frac{32\mu U}{D^2} = \frac{\rho S U^2}{2} \times \frac{L}{D} \times \lambda \text{ avec } \lambda = \frac{64}{Re}$$

9. La contrainte est donnée par $\tau_{zr}(r) = \mu \frac{\partial u}{\partial r}$, soit, compte tenu de l'expression de $u(r)$ obtenue à

la question précédente :
$$\tau_{zr}(r) = \frac{-4\mu U r}{R^2}$$

Par convention (cf. cours), la contrainte τ_{zr} est celle exercée, à la position r , par les strates de fluide situées à l'extérieur du cylindre de rayon r sur celles situées à l'intérieur. Cette contrainte est négative, ce qui veut dire que les strates extérieures "freinent" les strates intérieures.

La contrainte visqueuse exercée par le fluide sur la paroi du tube vaut $\tau_p = -\tau_{zr}(R)$ (le signe est négatif à cause de la convention ; τ_{zr} "de l'extérieur sur l'intérieur" et τ_p "de l'intérieur sur l'extérieur").

10. La force exercée par le fluide sur la surface S du tube vaut :

$$\vec{F}_{\mathcal{F} \rightarrow S} = \iint_S (p \vec{n}_{\mathcal{F} \rightarrow S} - \vec{\tau} \cdot \vec{n}_{\mathcal{F} \rightarrow S}) dS = \iint_S [p \vec{e}_r - (\tau_{rr} \vec{e}_r + \tau_{rz} \vec{e}_z)] dS$$

où $\vec{n}_{\mathcal{F} \rightarrow S} = \vec{e}_r$ (normale orientée du fluide vers le tube).

Remarque : alternativement, vous pouvez écrire

$$\vec{F}_{\mathcal{F} \rightarrow S} = \iint_S (-p \vec{n} + \vec{\tau} \cdot \vec{n}) dS = \iint_S [p \vec{e}_r - (\tau_{rr} \vec{e}_r + \tau_{rz} \vec{e}_z)] dS$$

où $\vec{n} = -\vec{e}_r$ (normale sortante par rapport au tube, c'est à dire orientée du tube vers le fluide).

La contribution de pression s'annule par raison de symétrie, et la composante τ_{rr} est nulle. Le calcul conduit donc à :

$$\vec{F}_{\mathcal{F} \rightarrow S} = \int_0^L \int_0^{2\pi} [\tau_p \vec{e}_z] R d\theta dz \text{ et donc } \boxed{\vec{F}_{\mathcal{F} \rightarrow S} = 2\pi R L \tau_p \vec{e}_z = 8\pi \mu L R U \vec{e}_z}$$

Ce qui se réécrit : $\vec{F}_{\mathcal{F} \rightarrow S} \cdot \vec{e}_z = \frac{\rho S U^2}{2} \times \frac{L}{D} \times \lambda$ avec $\lambda = \frac{64}{Re}$

avec $Re = \frac{UD}{\nu}$ et $S = \pi R^2/2 = \pi D^2/8$.

Remarquons que la force exercée par le fluide sur le tube est dans la direction $+\vec{e}_z$, le fluide "tire" sur le tube en exerçant une force orientée vers le bas. Inversement la force exercée par le tube sur le fluide est dans la direction $-\vec{e}_z$, le tube "freine" le fluide en exerçant une force orientée vers le haut.

11. Autre méthode : on fait un "bilan des forces" exercées sur la masse de fluide $\mathcal{F}$ contenue dans le tuyau ; respectivement la force exercée par le tuyau, la force de pression exercée en entrée et en sortie, et le poids du fluide. On a :

$$\Sigma \vec{F}_{ext \rightarrow \mathcal{F}} = -\vec{F}_{\mathcal{F} \rightarrow S} + (P_1 - P_2)S\vec{e}_z + \rho S L g_z \vec{e}_z = \vec{0}$$

Ce qui conduit de nouveau au résultat attendu.

Remarque : en toute rigueur, il n'est pas autorisé d'écrire un bilan des forces pour traduire l'équilibre car le tuyau est en "système ouvert". Il faut écrire un bilan de intégral de quantité de mouvement (cf. chapitre 8), ce qui est un peu plus délicat mais conduit au même résultat.

12. **Question additionnelle** : donnez l'expression du tenseur des contraintes.

Le tenseur des contraintes $\vec{\vec{\sigma}}$ a pour expression (cf. formulaire) :

$$\begin{aligned} \vec{\vec{\sigma}} &= \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} & \sigma_{\theta z} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p + \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} & -p + \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} & \tau_{\theta z} & -p + \tau_{zz} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -p + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} & \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \\ \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & -p + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) & \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) & \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

soit, pour cette solution d'écoulement particulière avec $u_r = u_\theta = 0$ et $u_z = u(r)$:

..... $\vec{\vec{\sigma}} = \begin{pmatrix} -p & 0 & \mu \frac{\partial u}{\partial r} \\ 0 & -p & 0 \\ \mu \frac{\partial u}{\partial r} & 0 & -p \end{pmatrix}$