

## Exercice complémentaire 10.0 (correction)

### 0. Explication sur les coordonnées sphériques.

La surface étant une sphère et la vitesse incidente orientée selon  $x$ , il est naturel d'utiliser les coordonnées sphériques dans un repérage avec un axe polaire  $(O, \vec{e}_x)$ .

Avec les conventions données dans le formulaire (section D.3), les coordonnées sphériques  $(R, \Theta, \phi)$  d'un point  $M$  repéré par son vecteur position  $\vec{x} = O\vec{M}$  sont définies ainsi :

- $R$  est la distance à l'origine ( $R = |\vec{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ).
- $\Theta$  est la "co-latitude", angle entre le vecteur  $\vec{x}$  et l'axe polaire  $(O, \vec{e}_x)$ .  $\Theta = 0$  est la direction du "pôle nord" ou plutôt "pôle aval" (point  $[x, y, z] = [+a, 0, 0]$  sur la sphère de rayon  $a$ ) ;  $\Theta = \pi$  est la direction du "pôle sud" ou "pôle amont" (point  $[x, y, z] = [-a, 0, 0]$ ) ;  $\Theta = \pi/2$  définit le "plan équateur" (plan d'équation  $x = 0$ ).
- $\phi$  est la "longitude" : angle entre le "plan méridien" contenant le point  $M$  et l'axe polaire et le "plan méridien de référence", c.a.d. le plan  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ .

Le changement de coordonnées entre cartésien et sphérique est donc :

$$[x; y; z] = [R \cos \Theta; R \sin \Theta \cos \phi; R \sin \Theta \sin \phi]$$

Notons que ce changement de variable s'écrit aussi :

$$[x; r] = [R \cos \Theta; R \sin \Theta],$$

où  $r = \sqrt{y^2 + z^2}$  est la distance du point considéré par rapport à l'axe polaire ( $x$ ).<sup>1</sup> Sous cette forme,  $(R, \Theta)$  définit un paramétrage polaire dans le plan méridien  $(x, r)$ .

Pour l'écoulement autour d'une sphère, on s'attend à avoir une symétrie de révolution : indépendance par rapport à la longitude  $\phi$ , la structure de l'écoulement est la même dans tous les "plans méridiens". La vitesse (et donc le potentiel) peut être recherchée en fonction des deux seules coordonnées  $[R, \Theta]$ .

On cherchera donc le potentiel sous la forme  $\Phi = \Phi(R, \Theta)$ . L'ambiguïté étant levée par rapport aux définitions des coordonnées, on pourra simplifier ces notations en  $\Phi = \Phi(r, \theta)$  en se rappelant qu'ici  $r = |\vec{x}|$  est la distance à l'origine et non la distance à l'axe de symétrie.

1. L'approximation d'écoulement irrotationnel n'est jamais uniformément valable car de la vorticité est nécessairement cr e e à la surface de la sphère à cause de la condition limite de vitesse nulle.

Comme dans le cas du cylindre vu en cours, la question de la pertinence de la solution potentielle autour de la sphère est assez subtile. Dans le cas d'un écoulement établi, stationnaire, en régime inertiel (c.a.d.   grand nombre de Reynolds), l'écoulement réel est caractérisé par une zone de recirculation, c.a.d. que la vorticité ne reste pas confin e dans la couche limite mais est présente dans le sillage sous forme de tourbillons. L'écoulement est donc assez diff rent de la solution potentielle.

Cependant, dans le cas considéré par Stokes d'un pendule oscillant, le fait que l'écoulement s'inverse périodiquement fait que la vorticité n'a "pas le temps" d'être convect e loin de la sphère et reste donc confin e dans les couches limites. L'hypothèse d'un écoulement potentiel à l'extérieur des couches limites est donc justifi e.

2.  $\vec{u} = \vec{\text{grad}}\Phi$ . Si de plus l'écoulement est incompressible, alors  $\text{div}(\vec{u}) = \text{div}(\vec{\text{grad}}\Phi) = \Delta\Phi = 0$ .
3.  $\vec{u} = U_0\vec{e}_x = \vec{\text{grad}}\Phi$  signifie que  $\partial\Phi/\partial x = U_0$ , donc  $\Phi = U_0x + Cte$ , la constante pouvant être prise nulle. En traduisant cela en coordonnées polaires :  $\Phi = U_0r \cos \theta$ .
4. Loin de la sphère, le potentiel  $\Phi(r, \theta)$  doit se raccorder avec celui caractérisant l'écoulement uniforme, c.a.d.  $\Phi(r, \theta) \approx U_0r \cos \theta$  lorsque  $r \rightarrow \infty$ . Si l'on veut chercher une solution à variable s par es, la dépendance par rapport  $\theta$  est donc nécessairement  $\cos \theta$ .

1. Notons aussi que la définition  $r = \sqrt{y^2 + z^2}$  correspond à la coordonn e radiale dans un repère cylindrique d'axe ( $x$ ). Ce choix est diff rent de celui utilisé dans le formulaire, section D.2, où toutes les formules sont donn es pour un repère cylindrique d'axe ( $z$ ) !

5. D'après l'expression du Laplacien en coordonnées sphériques :

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right)$$

Le second terme dans cette expression vaut

$$\frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right) = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (-\sin^2\theta f(r)) = \frac{1}{r^2 \sin\theta} (-2 \sin\theta \cos\theta f(r)) = \frac{-2f(r)}{r^2} \cos\theta$$

$$\text{donc } \Delta\Phi = \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{2f(r)}{r^2} \right] \cos\theta$$

L'équation vérifiée par  $f$  est donc :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{2f(r)}{r^2} = 0$$

6. (a) Si l'on cherche des solutions proportionnelles à  $r^\alpha$  et que l'on injecte cette forme dans l'expression précédente, on trouve :

$$\alpha(\alpha+1)r^{\alpha-2} - 2r^{\alpha-2} = 0$$

Donc  $\alpha(\alpha+1) - 2 = \alpha^2 + \alpha - 2 = 0$ , c'est une polynôme d'ordre 2 qui se factorise sous la forme  $(\alpha-1)(\alpha+2) = 0$ . Les solutions possibles sont donc  $\alpha = 1$  et  $\alpha = -2$ . Ce qui permet de rechercher la solution générale sous la forme suivante :

$$f(r) = (Ar + Br^{-2})$$

- (b) A la surface de la sphère on doit avoir la condition de non-pénétration  $u_r = \partial\Phi/\partial r = 0$ . Loin de la sphère on doit avoir  $\Phi(r, \theta) \approx U_0 r \cos\theta$ . Ces conditions s'écrivent respectivement :

$$f'(a) = 0; \quad f(r) \approx U_0 r \text{ pour } r \rightarrow \infty$$

La seconde condition donne directement  $A = U_0$ . La dérivée de la fonction  $f$  est  $f'(r) = A - 2Br^{-3}$ , donc la condition à la surface de la sphère est  $A - 2Ba^{-3} = 0$ , ce qui conduit à  $B = \frac{Aa^3}{2}$ . Donc :

$$A = U_0; \quad B = \frac{U_0 a^3}{2}.$$

- (c) Il ne reste plus qu'à dériver le potentiel par rapport à  $r$  et  $\theta$  pour obtenir les deux composantes du champ de vitesse :

$$u_r(r, \theta) = \frac{\partial}{\partial r} \left[ U_0 \left( r + \frac{a^3}{2r^2} \right) \cos\theta \right] = U_0 \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \cos\theta$$

$$u_\theta(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} \left[ U_0 \left( r + \frac{a^3}{2r^2} \right) \cos\theta \right] = -U_0 \left( 1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \sin\theta$$

7. On pourra trouver sur le site web du cours un programme en Matlab. La structure générale de l'écoulement est très similaire à la solution potentielle symétrique autour d'un cylindre (exercice 10.1, partie A).

8. On peut utiliser le (second) théorème de Bernoulli pour déduire la pression à la surface de la sphère. La quantité  $p + \rho|\vec{u}|^2/2$  est uniforme, sa valeur à la surface est égale à sa valeur loin de la sphère, soit :

$$p(r = a, \theta) + \frac{\rho u_\theta(r = a, \theta)^2}{2} = Cte = p_0 + \frac{U_0^2}{2}$$

$$\text{Donc } p(r = a, \theta) = p_0 + \frac{\rho U_0^2}{2} \left[ 1 - \left( \frac{3 \sin\theta}{2} \right)^2 \right]$$

La pression est maximale en  $\theta = 0$  (point d'arrêt aval) et  $\theta = \pi$  (point d'arrêt amont) et vaut  $p_0 + \frac{\rho U_0^2}{2}$  (ce qui est justement ce qu'on appelle la pression d'arrêt). Elle est minimale en  $\theta = \pi/2$  (cercle "équateur") et vaut  $p_0 - \frac{5\rho U_0^2}{8}$ .

9. Dans l'approximation potentielle, seule la pression contribue à la force, qui vaut :

$$\vec{F}_{\mathcal{F} \rightarrow S} = \iint p \vec{e}_{\mathcal{F} \rightarrow S} dS$$

10. On a  $\vec{e}_{\mathcal{F} \rightarrow S} = -\vec{e}_r$ , et la surface élémentaire sur la sphère de rayon  $a$  vaut  $dS = a^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ . On a donc :

$$\vec{F}_{\mathcal{F} \rightarrow S} = - \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi p(a, \theta) \vec{e}_r a^2 \sin \theta d\theta \right) d\varphi$$

En repassant en coordonnées cartésiennes on a  $\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_y + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_z$ . On peut alors évaluer les composantes de la force. On vérifie facilement (ou on justifie en invoquant la symétrie du problème) que les composantes selon  $y$  et  $z$  de la force sont nulles.

Pour la composante selon  $x$  (traînée) on a :

$$F_x = -2\pi a^2 \int_0^\pi p(a, \theta) \sin \theta \cos \theta d\theta = -2\pi a^2 \int_0^\pi \left[ \left( p_0 + \frac{\rho U_0^2}{2} \right) \sin \theta \cos \theta - \frac{9\rho U_0^2}{8} \sin^3 \theta \cos \theta \right] d\theta$$

En reconnaissant que  $\int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta = \left[ \frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^\pi = 0$  et  $\int_0^\pi \sin^3 \theta \cos \theta d\theta = \left[ \frac{\sin^4 \theta}{4} \right]_0^\pi = 0$ , on arrive finalement à  $F_x = 0$ . La traînée est nulle, c'est une illustration du paradoxe de d'Alembert.