

Exercice complémentaire 1.0 : Force de traînée sur une automobile

On cherche à estimer la force de traînée D s'exerçant sur une automobile de longueur L et surface frontale S roulant à la vitesse V dans de l'air, à l'aide d'une expérience utilisant une maquette à échelle réduite dans un tunnel hydrodynamique.

- Listez et discutez les paramètres physiques pertinents et indépendants dans ce problème.

Réponse :

On gardera comme paramètres la longueur L , la vitesse V , la masse volumique ρ et la viscosité dynamique μ du fluide.

- g n'est pas pertinent (contribue (faiblement) à la force verticale via la poussée d'Archimède mais pas à la force horizontale),*
- S non plus (proportionnel à L^2 pour une géométrie de voiture donnée).*
- La pression de référence (pression atmosphérique p_{atm}) non plus. C'est justifié lorsque le nombre de Mach est faible. C'est toujours le cas pour une automobile, la vitesse max étant de l'ordre de $140\text{km/h} = 38.9\text{m/s}$, le nombre de Mach vaut au maximum $M = 0.11$ compte tenu de la vitesse du son $c_0 = 340\text{m/s}$.*

Ce dernier argument est le plus difficile à justifier rigoureusement ; il a été énoncé sans démonstration au chapitre 1, et sera réexpliqué au chapitre 7 du cours.

- Enfin, la température T est un paramètre pertinent mais non indépendant (la masse volumique étant elle-même fonction de T).*

Donc $D = \mathcal{F}(V, L, \rho, \mu)$.

- En utilisant les principes de l'analyse dimensionnelle, montrez que la traînée s'exprime simplement sous la forme suivante :

$$D = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_x(Re), \quad \text{avec } Re = \frac{\rho V L}{\mu}$$

Réponse :

On applique la démarche du cours :

$$\frac{D}{M^* L^* T^{*-2}} = \bar{\mathcal{F}} \left(\frac{V}{L^* T^{*-1}}, \frac{L}{L^*}, \frac{\mu}{M^* L^{*-1} T^{*-1}} \right).$$

Le choix des unités intrinsèques au problème le plus simple est $L^ = L$, $T^* = L/V$, $M^* = \rho L^3$. Ceci conduit à*

$$D/(\rho L^2 V^2) = \bar{\mathcal{F}}(1, 1, 1, \frac{\mu}{\rho V L}).$$

La traînée adimensionnelle $D/(\rho L^2 V^2)$ est donc une fonction uniquement du paramètre $\frac{\mu}{\rho V L}$, et donc de son inverse dans lequel on reconnaît le nombre de Reynolds. On réécrit donc cette dépendance sous la forme :

$$D/(\rho L^2 V^2) = f(Re) \quad \text{avec } Re = \frac{\rho V L}{\mu}$$

Par convention on préfère utiliser la surface de référence S . Celle-ci est proportionnelle à L^2 pour une géométrie donnée, c'est-à-dire que $S = \alpha L^2$ où α est un coefficient géométrique sans dimensions. On peut introduire une fonction $C_x(Re)$ définie simplement par $C_x(Re) = 2f(Re)/\alpha$ ce qui conduit au résultat sous la forme recherchée.

- Calculez la valeur du nombre de Reynolds, pour une automobile de longueur $L = 4\text{m}$ (et surface frontale $S = 1.74\text{m}^2$), roulant à la vitesse $V = 90\text{km/h}$ dans de l'air (de propriétés ρ_a , μ_a données dans le formulaire).

Réponse :

En unités internationales la vitesse vaut $V = 90\text{km/h} = (90 \times 10^3\text{m})/(60 \times 60\text{s}) = (90/3.6)\text{m/s} = 25\text{m/s}$.

Les propriétés de l'air sont données dans le formulaire : $\rho_a = 1.205 \text{ kg/m}^3$, $\mu_a = 1.81 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$.
Le nombre de Reynolds vaut donc

$$Re = 25 \times 4 / (1.5 \times 10^{-5}) = 6.66 \cdot 10^6.$$

4. Dans l'expérience, la maquette est à l'échelle 1/10 (c.a.d. $L_m = L/10$). La vitesse dans le tunnel hydrodynamique est notée V_m . Le fluide est de l'eau (de propriétés ρ_m , μ_m données dans le formulaire).

Quelle doit être la valeur de V_m pour assurer la similitude de Reynolds ?

Réponse :

Si l'on veut être en similitude de Reynolds il faut que $Re_m = \rho_m V_m L_m / \mu_m = Re = 6.67 \times 10^6$.

Les propriétés de l'eau sont données dans le formulaire : $\rho_m \approx 10^3 \text{ kg/m}^3$; $\mu_m \approx 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

La longueur de la maquette est $L_m = L/10 = 0.4 \text{ m}$. Donc :

$$V_m = Re_m \times \mu_m / (\rho_m L_m) = (6.67 \times 10^6) \times 10^{-3} / (0.4 \times 10^3) = 16.7 \text{ m/s}$$

5. Le tunnel hydrodynamique étant réglé à la vitesse V_m précédemment déterminée, on mesure à l'aide d'une balance de forces une traînée sur la maquette $D_m = 911 \text{ N}$. En déduire le C_x , puis la traînée D sur la voiture.

Réponse :

La surface de la maquette vaut $S_m = S/100 = 0.0174 \text{ m}^2$; en effet les longueurs sont diminuées d'un facteur 10, les surfaces d'un facteur $10^2 = 100$. Pour la maquette on a $D_m = (1/2) \rho_m S_m V_m^2 C_{x,m} = C_x(Re_m)$. Le coefficient de traînée de la maquette vaut donc :

$$C_x(Re_m) = (2D_m) / (\rho_m S_m V_m^2) = (2 \times 911) / (1000 \times 0.0174 \times 16.6^2) = 0.38$$

Puisque le coefficient de traînée ne dépend que du nombre de Reynolds, il est le même pour la maquette et la voiture réelle : $C_x(Re) = C_x(Re_m)$. C'est le principe même de la similitude !

On peut donc déduire la traînée exercée sur la voiture :

$$D = (1/2) \rho S V^2 C_x(Re) = .5 \times 1.2 \times 1.67 \times 25^2 \times 0.38 = 245 \text{ N}$$

6. En déduire la puissance dissipée par les forces aérodynamiques, puis la puissance qui doit être fournie par le moteur, en supposant que le rendement énergétique global de celui-ci est $\eta = 20\%$.

Réponse :

La puissance des forces aérodynamiques vaut

$$\mathcal{P}_{aero} = D \times V = 6.12 \text{ kW}$$

Le rendement du moteur peut être défini par $\eta = \mathcal{P}_{aero} / \mathcal{P}_{moteur}$.

Avec les données du problème on a une puissance fournie par le moteur :

$$\mathcal{P}_{moteur} = 30.6 \text{ kW} = 41 \text{ hp}$$

(1hp = 1 cheval-vapeur = 746W ; unité différente du cheval-fiscal apparaissant sur la carte grise !)