

Exercice complémentaire 4.0 : premier problème de Stokes (correction)

2 Méthode

1. Il semble intuitif que la vitesse $v(x, t)$ soit proportionnelle à la vitesse U_1 de la plaque : si la plaque va deux fois plus vite on s'attend à ce que l'écoulement induit soit également deux fois plus rapide. Attention cependant car l'intuition n'est pas toujours un guide fiable en physique ! La véritable justification de cette propriété vient du fait que le problème mathématique est *linéaire*, ce qui implique que les conséquences (l'écoulement induit) sont proportionnelles aux causes (le mouvement de la plaque).
2. En injectant la forme de la solution $v(x, t) = U_1 v^*(x, t)$ dans le problème de départ et en simplifiant par U_1 on trouve que la fonction v^* est la solution du problème suivant :

$$\frac{\partial v^*}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} \quad (1)$$

Avec les conditions limite et condition initiale :

$$\text{CL : } v^*(x = 0, t) = 1 \text{ pour } t > 0, \quad (2)$$

$$\text{CI : } v^*(x, t = 0) = 0 \text{ pour } x > 0. \quad (3)$$

On applique la première étape de la méthode d'analyse dimensionnelle du chapitre 1, *listez les paramètres pertinents et indépendants*. Le problème étant formulé sous forme mathématique cette démarche consiste à lister toutes les quantités mathématiques intervenant dans le problème. On arrive effectivement à $v^*(x, t) = \mathcal{F}(x, t, \nu)$.

3. On va maintenant appliquer la méthode des unités intrinsèques. Pour ceci on va mettre le problème sous la forme

$$\frac{v^*}{1} = \bar{\mathcal{F}}\left(\frac{x}{L^*}, \frac{t}{T^*}, \frac{\nu}{L^* T^{*-2}}\right).$$

Remarquez ici que la fonction v^* étant sans dimensions, son unité physique est 1. On va ensuite choisir les unités intrinsèques en faisant le choix le plus évident : $L^* = x$, $T^* = t$. Ceci conduit à :

$$v^* = \bar{\mathcal{F}}\left(1, 1, \frac{\nu t}{x^2}\right).$$

En posant $\eta = \frac{x}{\sqrt{\nu t}}$, et en reconnaissant que $\bar{\mathcal{F}}\left(1, 1, \frac{\nu t}{x^2}\right) = \bar{\mathcal{F}}\left(1, 1, \eta^{-1/2}\right) = f(\eta)$ on arrive bien à $v^*(x, t) = f(\eta)$ et donc à la forme demandée $v(x, t) = U_1 f(\eta)$.

Remarque : on aurait pu arriver à cette forme en appliquant directement la méthode du chapitre 1 à la fonction $v(x, t)$, ce qui aurait conduit, en listant les paramètres intervenant dans le problème vérifié par cette fonction, à $v(x, t) = \mathcal{F}(x, t, \nu, U_1)$. La méthode des unités intrinsèques aurait alors conduit à :

$$\frac{v}{L^* T^{*-1}} = \bar{\mathcal{F}}\left(\frac{x}{L^*}, \frac{t}{T^*}, \frac{\nu}{L^* T^{*-2}}, \frac{U_1}{L^* T^{*-1}}\right),$$

et ensuite

$$\frac{t}{x} v(x, t) = \bar{\mathcal{F}}\left(1, 1, \frac{\nu t}{x^2}, \frac{U_1 t}{x}\right) = f_1(\eta, \xi) \text{ avec } \xi = \frac{U_1 t}{x}.$$

On remarque ensuite que la solution $u(x, t)$ est forcément proportionnelle à U_1 (simplification issue de la structure des équations), ce qui implique que la fonction $f(\eta, \xi)$ est proportionnelle à ξ : $f_1(\eta, \xi) = \xi f(\eta)$. On retombe alors sur le même résultat ; en effet $u(x, t) = \frac{x}{t} \xi f(\eta) = \frac{x}{t} \times \frac{U_1 t}{x} \times f(\eta) = U_1 f(\eta)$.

3 Résolution

1. $\eta = \frac{x}{\sqrt{\nu t}}$ d'où $\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{\nu t}}$ et $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0$

$\eta = \frac{x}{\sqrt{\nu}} t^{-1/2}$ avec $\frac{\partial}{\partial t}(t^n) = nt^{n-1}$ d'où $\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{x}{\sqrt{\nu}} \left(-\frac{1}{2}t^{-3/2}\right) : \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{x}{2t\sqrt{\nu t}}$

2. $v(x, t) = U_1 f(\eta)$ d'où $\frac{\partial v}{\partial t} = U_1 f'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{x U_1}{2t\sqrt{\nu t}} f'(\eta)$

et $\frac{\partial v}{\partial x} = U_1 f'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x}$ donc $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = U_1 f''(\eta) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + U_1 f'(\eta) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{U_1}{\nu t} f''(\eta)$

On en déduit donc pour l'équation (1) : $\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Leftrightarrow -\frac{x U_1}{2t\sqrt{\nu t}} f'(\eta) = \nu \frac{U_1}{\nu t} f''(\eta)$

soit, après simplification et en remarquant que $\frac{x}{\sqrt{\nu t}} = \eta$: $f''(\eta) + \frac{1}{2}\eta f'(\eta) = 0$

Considérant les conditions limite et initiale, compte tenu de $\eta = x/\sqrt{\nu t}$ on remarque que $\lim_{t \rightarrow 0} \eta = +\infty$ pour $x > 0$

et que $\lim_{x \rightarrow 0} \eta = 0$ pour $t > 0$

On en déduit que la condition initiale $v(x > 0, t = 0) = 0$ s'écrit $f(\eta \rightarrow \infty) = 0$

et la condition limite $v(x = 0, t) = U_1$ $f(0) = 1$

3. En posant $f'(\eta) = g(\eta)$, l'équation à résoudre devient $g'(\eta) + \frac{1}{2}\eta g(\eta) = 0$

soit $\frac{dg}{d\eta} = -\frac{1}{2}\eta g \Leftrightarrow \frac{1}{g} dg = -\frac{1}{2}\eta d\eta \Leftrightarrow \int_{g(0)}^{g(\eta)} \frac{1}{g^*} dg^* = \int_0^\eta -\frac{1}{2}\eta^* d\eta^*$

..... $\Leftrightarrow \left[\ln g^*\right]_{g(0)}^{g(\eta)} = \left[-\frac{1}{4}\eta^{*2}\right]_0^\eta \Leftrightarrow \ln[g(\eta)] - \ln[g(0)] = \ln\left[\frac{g(\eta)}{g(0)}\right] = -\frac{1}{4}\eta^2$

On obtient donc $\frac{g(\eta)}{g(0)} = e^{-\eta^2/4}$, soit $g(\eta) = g(0)e^{-\eta^2/4}$ où $g(0)$ est une constante à définir.

Il reste à résoudre $f'(\eta) = g(\eta) = g(0)e^{-\eta^2/4}$

soit, en intégrant par rapport à η : .. $\int_0^\eta f'(\eta^*) d\eta^* = \int_0^\eta g(0)e^{-\eta^{*2}/4} d\eta^* = g(0) \int_0^\eta e^{-\eta^{*2}/4} d\eta^*$

D'après la définition de la fonction erreur donnée dans l'énoncé, $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds$,

on a donc $\int_0^\eta f'(\eta^*) d\eta^* = g(0)\sqrt{\pi} \text{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) \Leftrightarrow f(\eta) - f(0) = g(0)\sqrt{\pi} \text{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right)$

La solution générale de l'équation (1) a donc pour expression .. $f(\eta) = f(0) + g(0)\sqrt{\pi} \text{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right)$

où $f(0)$ et $g(0)$ sont deux constantes à définir avec les conditions déduites des conditions limites

et initiales du problème d'origine, à savoir $f(0) = 1$

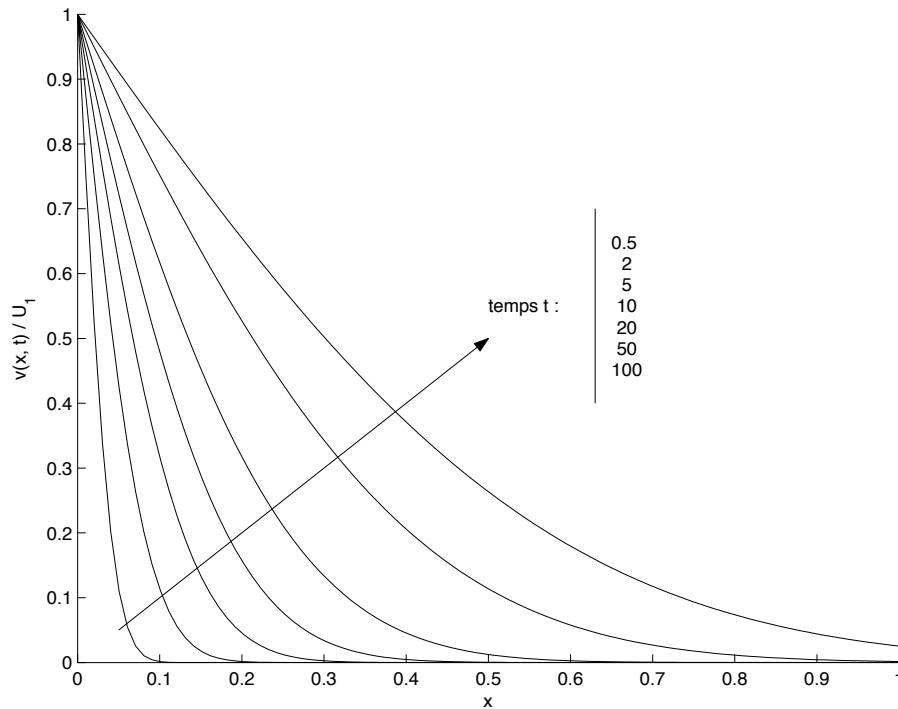
et $f(\eta \rightarrow +\infty) = 0 \Leftrightarrow 0 = f(0) + g(0)\sqrt{\pi} \text{erf}(+\infty) = 1 + g(0)\sqrt{\pi}$

On en déduit $g(0) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ et donc $f(\eta) = 1 - \text{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) = \text{erfc}\left(\frac{\eta}{2}\right)$

4. On en déduit la solution $v(x, t) = U_1 f(\eta) = U_1 \text{erfc}(\eta/2)$ avec $\eta = x/\sqrt{\nu t}$,

soit $v(x, t) = U_1 \text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4\nu t}}\right) = U_1 \left[1 - \text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\nu t}}\right)\right]$

Le profil adimensionné $v(x, t)/U_1$ pour différents instants est représenté sur la figure ci-dessous



Cette figure a été obtenue à l'aide du programme MATLAB suivant (fichier `trace_profils.m`, disponible sur la page Moodle du cours) :

```
clear all; close all;

% Valeur de la viscosite cinematique :
nu = 1e-3;

% Discretisation de l'espace avec 100 points entre 0 et 2 :
x = linspace(0, 1, 100);

% Definition des instants auxquels on souhaite tracer le profil :
t = [0.5, 2 5, 10, 20, 50, 100];

% Trace le profil pour les differents instants :
figure
hold on
for n=1:length(t)
    plot(x, erfc(x/sqrt(4*nu*t(n))), 'b');
end
xlabel('x'); ylabel('v(x, t) / U_1');

% Trace la fleche du temps :
arrowline([0.05,0.5],[0.05,0.5], 'color', 'k');
text(0.5, 0.55, 'temps t :', 'Color', 'k');

% On affiche les instants sur la figure :
text(0.65, 0.55, num2str(t'), 'color', 'k');
line([0.63 0.63], [0.4, 0.7], 'color', 'k');

% On sauvegarde la figure sur le disque :
print(gcf, 'profils.pdf', '-dpdf'); % format PDF
print(gcf, 'profils.eps', '-deps'); % format Postscript encapsule
print(gcf, 'profils.jpg', '-djpeg'); % format JPEG
```

5. $\delta(t) = \sqrt{\nu t}$ avec les dimensions suivantes : $[\nu] = L^2 T^{-1}$ et $[t] = T$

d'où $[\delta(t)] = ([\nu] \times [t])^{1/2} = (L^2 T^{-1} \times T)^{1/2}$ donc $[\delta(t)] = L$

6. Le tenseur des contraintes visqueuses a pour expression en repérage cartésien (cf. cours de MMC) :

$$\vec{\vec{\tau}} = \mu \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} & 2 \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} & 2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

avec ici $u_x = u_z = 0$ et $u_y = v(x, t)$, d'où

$$\vec{\vec{\tau}} = \mu \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La paroi en $x = 0$ est verticale et sa normale sortante est $\vec{n} = \vec{e}_x$. La contrainte pariétale est donc :

$$\vec{\tau}_p = \vec{\vec{\tau}}(x=0) \cdot \vec{n} = \mu \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v}{\partial x}(x=0, t) & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x=0, t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \frac{\partial v}{\partial x}(x=0, t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $\vec{\tau}_p = \mu \frac{\partial v}{\partial x}(x=0, t) \vec{e}_y$ avec $v(x, t) = U_1 f(\eta) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = U_1 f'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} = U_1 g(\eta) \frac{1}{\sqrt{\nu t}}$

D'où $\frac{\partial v}{\partial x}(x=0, t) = g(0) \frac{U_1}{\sqrt{\nu t}}$ avec $g(0) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ d'après la question 3.

On en déduit $\frac{\partial v}{\partial x}(x=0, t) = \frac{-2U_1}{\sqrt{\pi \nu t}}$ et donc $\vec{\tau}_p = \frac{-2\mu U_1}{\sqrt{\pi \nu t}} \vec{e}_y$

On remarque que la contrainte pariétale est négative (le frottement exercé par le fluide sur la paroi est bien dirigé vers le bas) et qu'elle décroît au cours du temps comme $1/\sqrt{\nu t}$.