

Exercice complémentaire 8.0 : Estimation de la traînée d'un cylindre (correction)

1. Notons Ω le *volume de contrôle* correspondant au parallélépipède dont on a retiré le cylindre. Notons $\partial\Omega = \Gamma \cup \Sigma$ la frontière du volume de contrôle, où Σ est la surface du cylindre et Γ la frontière "fluide" du domaine (les faces extérieures).

Le bilan de masse $M(\Omega) = \iiint_{\Omega} \rho dV$ sur Ω s'écrit :

$$\frac{d}{dt} M(\Omega) = - \iint_{\partial\Omega} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0.$$

En notant que l'intégrale sur Σ est nulle (car $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ sur Σ), on arrive à

$$- \iint_{\Gamma} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0.$$

Evaluons l'intégrale sur chacune des 6 faces extérieures du domaine. Les 4 premières faces correspondent aux cotés du rectangle représenté sur la figure multipliés par la profondeur ($2H$). Les 2 dernières faces (en $z = \pm H$) ne contribuent pas au bilan car il n'y a pas de vitesse dans la direction z . Donc :

$$\begin{aligned} 0 = & -\rho \left[\int_{-H}^H \int_{-b}^b \vec{u}(-L, y) \cdot \vec{n} dy dz + \int_{-H}^H \int_{-b}^b \vec{u}(+L, y) \cdot \vec{n} dy dz \right. \\ & \left. + \int_{-H}^H \int_{-L}^L \vec{u}(x, -b) \cdot \vec{n} dx dz + \int_{-H}^H \int_{-L}^L \vec{u}(x, +b) \cdot \vec{n} dx dz \right] \end{aligned}$$

En remplaçant la normale $\vec{n}$ par sa valeur sur chacune des faces (respectivement $-\vec{e}_x, +\vec{e}_x, -\vec{e}_y$ et $+\vec{e}_y$), on arrive à :

$$2H\rho \left[2bU_0 - \int_{-b}^b u(+L, y) dy + \int_{-L}^L v(x, -b) dx - \int_{-L}^L v(x, +b) dx \right] = 0 \quad (1)$$

2. Ecrivons de même le bilan intégral pour la quantité de mouvement totale $\vec{P}(\Omega) = \iiint \rho \vec{u} dV$ contenue dans le volume de contrôle :

$$\frac{d}{dt} \vec{P}(\Omega) = \iint_{\partial\Omega} (-p\vec{n} + \vec{\tau} \cdot \vec{n}) dS - \iint_{\partial\Omega} (\rho \vec{u})(\vec{u} \cdot \vec{n}) dS$$

Dans le cas stationnaire ($\frac{d}{dt} \vec{P}(\Omega) = 0$)¹, Et en séparant les contributions sur Σ et sur Γ , on arrive au théorème d'Euler :

$$\vec{F}_{\mathcal{F} \rightarrow \Sigma} = - \iint_{\Gamma} [p\vec{n} + (\rho \vec{u})(\vec{u} \cdot \vec{n})] dS$$

Evaluons comme dans la question précédente les intégrales sur chacune des 4 faces. En notant que les contributions de pression s'annulent on a :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\mathcal{F} \rightarrow \Sigma} = & - \left[\int_{-H}^H \int_{-b}^b \rho(U_0 \vec{e}_x)(-U_0) dy dz + \int_{-H}^H \int_{-b}^b \rho(u(L, y) \vec{e}_x)(+u(L, y)) dy dz \right. \\ & \left. + \int_{-H}^H \int_{-L}^L \rho(U_0 \vec{e}_x + v(x, -b) \vec{e}_y)(-v(x, -b)) dx dz + \int_{-H}^H \int_{-L}^L \rho(U_0 \vec{e}_x + v(x, +b) \vec{e}_y)(+v(x, +b)) dx dz \right] \end{aligned}$$

La composante selon $\vec{e}_x$ (traînée) s'obtient en projetant l'équation précédente le long de cette direction. On arrive finalement à :

1. En toute rigueur, l'écoulement étant fortement instationnaire, la quantité de mouvement $\vec{P}(\Omega)$ varie au cours du temps ; cependant le raisonnement reste valable si $\vec{F}_{\mathcal{F} \rightarrow \Sigma}$ est la force *moyenne* exercée sur le cylindre

$$F_x = \vec{F}_{\mathcal{F} \rightarrow \Sigma} \cdot \vec{e}_x = 2H\rho \left[2bU_0^2 - \int_{-b}^b (u(+L, y))^2 dy + \int_{-L}^L U_0 v(x, -b) dx - \int_{-L}^L U_0 v(x, +b) dx \right] \quad (2)$$

3. Combinons maintenant les deux équations (1) et (2) en faisant la combinaison (2) - U_0 (1). On remarque que tous les termes se simplifient à l'exception de l'intégrale dans le plan de sortie et qu'on arrive à :

$$F_x = 2H\rho \int_{-b}^b u(+L, y)(U_0 - u(+L, y)) dy \quad (3)$$

L'interprétation physique de cette équation est : *la force de traînée est égale au flux du déficit de vitesse à travers le plan de sortie.*

4. Avec le profil de vitesse indiqué on arrive à :

$$F_x = 2H\rho \left[\int_{-b}^{-a} U_0(U_0 - U_0) dy + \int_{-a}^a 0.7U_0(U_0 - 0.7U_0) dy + \int_a^b U_0(U_0 - U_0) dy \right] = (2H) \cdot (2a) \cdot 0.21\rho U_0^3$$

Le coefficient de traînée correspondant est

$$C_x = \frac{F_x}{(1/2)\rho S U_0^2} = 0.42$$

où $S = (2H) \cdot (2a)$ est la surface frontale du cylindre.

5. En projetant le bilan de QDM selon $\vec{e}_y$, on obtient :

$$F_y = \vec{F}_{\mathcal{F} \rightarrow \Sigma} \cdot \vec{e}_y = 2H\rho \left[\int_{-L}^L v(x, -b)^2 dx - \int_{-L}^L v(x, b)^2 dx \right] \quad (4)$$

On remarque que si $|v(x, +b)| = |v(x, -b)|$, la portance est nulle.