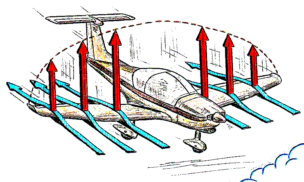
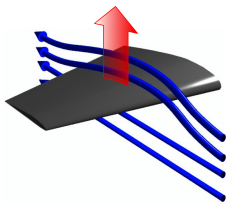


David FABRE

IMFT / UPS

Département de Mécanique



10. Ecoulements potentiels et Aérodynamique à haut Reynolds



Questions de cours sur le chapitre 10

Questions de cours :

1. Sous quelles hypothèses peut-on décrire un écoulement à partir d'un potentiel Φ ? Discutez les principales propriétés mathématiques de la fonction Φ .
2. Expliquez pourquoi, dans les écoulements autour d'obstacles à grand nombre de Reynolds, la vorticité reste confinée dans les zones de "couche limite" (voisinage des parois) et dans les zones de sillage.
3. En déduire que le modèle "Ecoulement potentiel" décrit bien les écoulements en dehors de ces zones.
4. Énoncez et démontrez le second théorème de Bernoulli.

Exercices de cours :

1. Donnez l'expression de l'écoulement potentiel symétrique autour d'un cylindre, et montrez que dans le modèle "fluide parfait potentiel" la force exercée sur le cylindre est nulle (Paradoxe de d'Alembert).
2. Démonstration du théorème de Kutta-Joukowski : montrez que la force de portance associée à un écoulement potentiel "solution composite" de circulation Γ et vitesse U_0 vaut $F_y = -\rho\Gamma U_0$.

Sommaire

- Écoulements potentiels
 - Dynamique de la vortacité
 - Écoulements potentiels : définition et propriétés
 - Second théorème de Bernoulli
 - Écoulements potentiels : exemples
- Écoulement autour d'un cylindre
 - Solution théorique potentielle
 - Écoulement réel
- Écoulement autour d'un profil d'aile

Vorticité

Définitions : (rappel chap. 7)

Le vecteur $\vec{\omega} = r \vec{\otimes} t(\vec{u})$ est appelé vorticité de l'écoulement.

Propriétés :

- Le vecteur $\vec{\Omega} = \vec{\omega}/2$ appelé vecteur tourbillon représente la "rotation intrinsèque" des particules fluides.
Celle-ci est indépendante du fait que les trajectoires "tournent" ou pas !
(contres-exemples ; cf. chapitre 7 et MMC2).
- Dans un fluide réel (visqueux), $\vec{\omega}$ est directement relié au frottement sur une paroi solide.
En effet $|\vec{\tau}| = \mu |\vec{\omega}|$

[Démonstration simplifiée] : en 2D ; pour une paroi plane d'équation $y = cte$:

$$\tau_{xy} = 2\mu D_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial u_y}{\partial x}} \right)$$

$$\omega_z = \left(\cancel{\frac{\partial u_y}{\partial x}} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$$

$$\text{Donc } \tau_{xy} = -\mu \omega_z !$$

Théorème de Helmholtz

(Démonstration simplifiée en 2D)

Considérons un écoulement 2D incompressible dans lequel la seule composante de la vorticité est $\omega_z = (\partial u_y / \partial x - \partial u_x / \partial y)$.

Alors on montre à partir de l'équation de Navier-Stokes (démo au tableau) que celle-ci est gouvernée par l'équation suivante :

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\text{grad}}(\omega_z) = \nu \Delta \omega_z \quad (1)$$

Conséquences :

-   Dans un "fluide parfait", si la vorticité ω_z est nulle en tout point à l'instant initial, alors elle reste nulle aux instants ultérieurs.

(Théorème de Helmholtz).

-   Dans un fluide réel (visqueux), si $Re \gg 1$ (régime d'écoulement inertiel), alors le terme de diffusion est négligeable devant le terme de convection.

Si l'écoulement incident est irrotationnel, alors l'écoulement reste irrotationnel sauf au voisinage des objets solides et dans leur sillage.

Ce théorème justifie qu'en pratique de nombreux écoulements à grand nombre de Reynolds sont irrotationnels.

Théorème de Helmholtz

Généralisation en 3D :

En prenant le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes incompressible on obtient l'équation de Helmholtz qui gouverne l'évolution de la vorticité $\vec{\omega} = \vec{rot}(\vec{u})$:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{grad}(\vec{u}) \cdot \vec{\omega}}_{[C]} = \underbrace{\vec{grad}(\vec{\omega}) \cdot \vec{u}}_{[E]} + \underbrace{\nu \Delta \vec{\omega}}_{[V]} \quad (2)$$

[Démonstration :] **Exercice** (utiliser les formules (E10), (E7), (E11), (E12), (E13) du formulaire, section E.)

On retrouve l'équation précédente, avec un terme supplémentaire $[E]$ appelé **Etirement tourbillonnaire**.

Ce terme a pour effet de réorienter la vorticité initialement présente dans l'écoulement mais ne constitue pas un terme de production de vorticité.

La conclusion reste la même : le théorème Helmholtz est donc également valable en 3D, sous la forme suivante :

Si $\vec{\omega} = \vec{0}$ en tout point à l'instant initial, alors $\vec{\omega}$ reste nulle $\forall(t, \vec{x})$

Écoulements potentiels

On appelle écoulement irrotationnel un écoulement vérifiant $\vec{\omega} = \text{rot}(\vec{u}) = \vec{0} \quad \forall \vec{x}$.

Définition mathématique :

Si $\text{rot}(\vec{u}) = \vec{0}$, alors il existe une fonction Φ appelée **Potentiel des vitesses** telle que :

$$\vec{u} = \text{grad} \Phi$$

Les écoulements irrotationnels sont donc également appelés **écoulements potentiels**.

Propriété importante :

Si, de plus, l'écoulement est incompressible ($\text{div}(\vec{u}) = 0$), alors le potentiel vérifie l'équation suivante :

$$\text{div}(\text{grad} \Phi) = \Delta \Phi = 0.$$

Dans ce cas le calcul d'un écoulement se ramène alors à la résolution d'une équation scalaire linéaire particulièrement simple !

Il existe des méthodes mathématiques puissantes pour résoudre cette équation dans un grand nombre de cas (cf. programme de Master).

Remarques :

- Φ est défini à une constante près, qui peut éventuellement dépendre du temps.
- L'hypothèse d'écoulement potentiel est une hypothèse mathématique, contrairement à l'hypothèse de régime d'écoulement inertiel qui est une hypothèse physique !

En général les écoulements inertiels sont potentiels "loin des obstacles".
(mais il existe des contre-exemples !)

Écoulements potentiels : propriétés

Propriétés :

- Réversibilité en temps : si $\vec{u} = \text{grad}(\Phi)$ est une solution d'écoulement potentiel pour une géométrie donnée, alors $-\vec{u} = \text{grad}(-\Phi)$ l'est également.
- Additivité des solutions : si $\vec{u}_1 = \text{grad}\Phi_1$ et $\vec{u}_2 = \text{grad}\Phi_2$ sont deux écoulements potentiels alors $\vec{u} = \text{grad}(\Phi_1 + \Phi_2)$ l'est également.

Attention : non-additivité des pressions !

Si p_1 et p_2 sont les champs de pression associés à $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$,

et p le champ de pression associé à $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$,

alors $p \neq p_1 + p_2$!

- On montre qu'un écoulement potentiel stationnaire autour d'un obstacle génère une force de traînée nulle sur celui-ci ! (Paradoxe de d'Alembert).
- En revanche l'écoulement potentiel autour d'un objet bidimensionnel (par exemple un cylindre ou un profil d'aile) peut conduire à une force de portance non nulle.
- Les écoulements potentiels vérifient $\Delta \vec{u} = \vec{0}$

Ils sont donc solutions des équations d'Euler quelque soit la viscosité et donc le nombre de Reynolds !

[Démonstration] : $\Delta \vec{u} = \text{grad div } \vec{u} - \text{rot rot } \vec{u} = \vec{0}$.

(Formulaire Eq. (E.14))

(NB : dans un écoulement potentiel $\vec{\tau} \neq \vec{0}$ mais $\text{div}(\vec{\tau}) = \mu \Delta \vec{u} = 0$. Les contraintes visqueuses ne sont pas nulles mais équilibrées en tout point).

Potentiels des vitesses et fonction de courant

Remarque :

Pour les écoulements bidimensionnels, le **potentiel des vitesses** Φ ("phi") et la **fonction de courant** ψ ("psi") jouent des rôles voisins.

$$\text{r\^ot } \vec{u} = \vec{0} \quad \longrightarrow \quad \exists \Phi \text{ t.q. } \vec{u} = \text{grad } \Phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si de plus $\text{div}(\vec{u}) = 0$, $\longrightarrow \Delta \Phi = 0$.

$$\text{div}(\vec{u}) = 0 \quad \longrightarrow \quad \exists \psi \text{ t.q. } \vec{u} = \text{r\^ot}(\psi \vec{e}_z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si de plus $\text{r\^ot}(\vec{u}) = \vec{0}$, $\longrightarrow \Delta \psi = 0$.

Pour les écoulements irrotationnels et incompressibles, on peut utiliser les 2. Dans ce cas les lignes iso-potentielles ($\Phi = Cte$) et les lignes de courant ($\psi = Cte$) forment deux réseaux de courbes orthogonales.

On peut de plus combiner ces deux outils en un unique potentiel complexe défini par $f(x, y) = \Phi(x, y) + i\psi(x, y)$, qui a la propriété très importante d'être une fonction analytique de la variable complexe $z = x + iy$ (cf. programme de M1).

Second théorème de Bernoulli pour les écoulements potentiels

Sous les hypothèses suivantes :

- (a) Écoulement incompressible (ρ uniforme),
- (b) Écoulement stationnaire,
- (c) Champ de gravité uniforme,
- (e) Écoulement potentiel (c.a.d. irrotationnel),

La quantité $p + \rho g z + \rho |\vec{u}|^2 / 2$ est uniforme dans tout l'écoulement.

[Démonstration] : A partir de l'éq. de Navier-Stokes en utilisant les formules (E.10) et (E.14) :

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \left(g \vec{\text{rad}}(|\vec{u}|^2 / 2) + \cancel{\vec{\text{rot}} \vec{u} \wedge \vec{u}} \right) = -g \vec{\text{rad}} p + g \vec{\text{rad}}(-\rho g z) + \mu \left[g \vec{\text{rad}}(\text{div}(\vec{u})) - \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{u})) \right]$$

$$\implies g \vec{\text{rad}} \left(p + \rho g z + \rho |\vec{u}|^2 / 2 \right) = \vec{0}$$

Cette version du théorème permet de calculer très facilement la pression (et donc les forces exercées sur un obstacle) dans un écoulement potentiel, si l'on connaît la valeur de la pression en **un** point du domaine (choisi par exemple "loin des obstacles" ou "sur une surface libre").

Remarque : pour arriver à ce second théorème il n'est pas nécessaire de supposer les forces visqueuses négligeables !
(même si en pratique les écoulements potentiels sont en général des écoulements inertiels).

Généralisation :

Si on enlève l'hypothèse (b) on peut arriver au théorème suivant appelé Théorème de Bernoulli instationnaire :

$$\frac{p}{\rho} + g z + |\vec{u}|^2 / 2 + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{est } \underline{\text{uniforme}} \text{ dans tout l'écoulement.}$$

Écoulement autour d'un cylindre (solution théorique potentielle)

Exemple important : **Écoulement potentiel autour d'un cylindre.**

(Exercice 10.1)

Considérons l'écoulement stationnaire, bidimensionnel autour d'un cylindre de rayon a dans un fluide de masse volumique ρ (on néglige la gravité).

On montrera tout d'abord qu'il existe deux solutions élémentaires :

- Solution symétrique $\Phi = \Phi_s = x \left(1 + \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right) \equiv \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta$
- Solution antisymétrique $\Phi = \Phi_a = \arctan(y/x) \equiv \theta$
- La superposition des deux, c.a.d. $\Phi = U\Phi_s + \frac{\Gamma}{2\pi}\Phi_a$, est également solution.

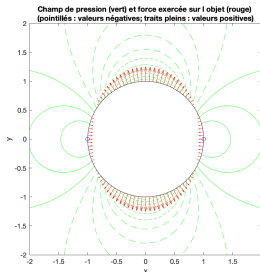
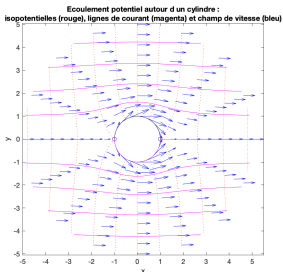
1. A l'aide du programme `Ecoulement.Potentiel.Cylindre.py` disponible sur le site du cours, (ou de l'ancien programme `Ecoulement.Potentiel.Cylindre.m`), étudiez la forme des lignes de courant selon les valeurs de U et $\Gamma/2\pi$.
2. Etudier la position des points d'arrêts de l'écoulement en fonction du paramètre $\gamma = \frac{\Gamma}{2\pi a U}$
3. Montrer que la force exercée sur le cylindre par cet écoulement (par unité de longueur dans la direction transverse) est dans la direction y et a pour intensité

$$F_y = -\rho \Gamma U$$

Écoulement "réel" potentiel autour d'un cylindre : solution symétrique

Structure de la solution symétrique

$$\Phi = U \Phi_s ; \quad \Phi_s = x \left(1 + \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right) \equiv \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta$$



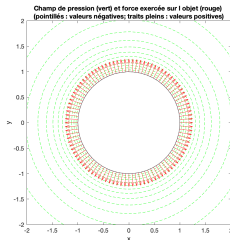
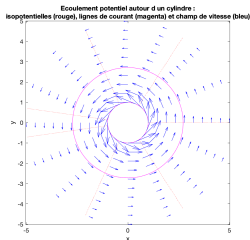
Remarques :

- Cette solution conduit à $F_x = F_y = 0$ (paradoxe de d'Alembert).
- Elle n'est jamais observée en réalité pour un écoulement stationnaire autour d'un cylindre. L'écoulement réel est caractérisé par une zone de recirculation qui devient instationnaire pour $Re > 47$ (cf. chapitre 9) ; pour $Re \gtrsim 10^5$ l'écoulement est fortement turbulent et caractérisé par un déficit de vitesse dans le sillage (cf. exercice 9.0).
- La solution potentielle est en revanche observée dans le cas d'un écoulement instationnaire pulsé à haute fréquence. Dans ce cas $\Psi = U(t)\Psi_s$ avec $U(t) = \cos \omega t$ et on peut montrer que la force exercée est proportionnelle à l'accélération de l'écoulement : $F_x = \rho \pi a^2 \dot{U} = -\rho \pi a^2 \omega \sin \omega t$

Écoulement "réel" potentiel autour d'un cylindre : solution antisymétrique

Structure de la solution antisymétrique : (figures ci-dessous pour $\Gamma < 0$)

$$\Phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \Phi_a; \quad \Phi_a = \arctan(y/x) \equiv \theta.$$



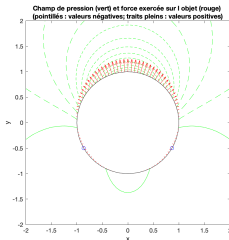
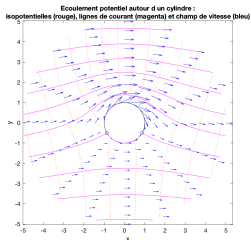
Remarques :

- C'est la solution exacte du problème de l'écoulement autour d'un cylindre tournant à la vitesse angulaire Ω , avec $\Gamma = 2\pi\Omega a^2$ (cf. TD 7.1).
- Cette solution exacte est valable quelque soit le nombre de Reynolds ! (ici défini comme $Re = \Omega a^2 / \nu$).
- Cette solution conduit à une force nulle $F_x = F_y = 0$.
- Elle conduit en revanche à un couple (par unité de longueur) $M_z = -4\pi\mu\Omega a^2 \equiv -2\Gamma\mu a^4$
- Notons que Φ est une fonction multivaluée. Sa détermination principale $\Phi = \theta$, $\theta \in [-\pi, \pi]$ est discontinue mais le champ de vitesse qui en dérive est bien une fonction continue.
- Γ peut être interprété comme la circulation du champ de vitesse : $\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{x}$ où C est un contour (quelconque) entourant le cylindre.

Écoulement "réel" potentiel autour d'un cylindre : solution composite

Structure de la solution composite :

$$\Phi = U\Phi_s + \frac{\Gamma}{2\pi}\Phi_a \quad (\text{Cas représenté : } U = 1; \Gamma/2\pi = -1)$$



Remarques :

- Cette solution conduit à une force de trainée nulle $F_x = 0$
- La force de portance (par unité de longueur) est en revanche non nulle !

$$F_y = -\rho\Gamma U \quad (\text{NB : } F_y > 0 \text{ dans le cas représenté})$$

Démo (i) : par intégration de la force de pression (exercice 10.1, question 16)

Démo (ii) : par bilan de QDM sur un volume de contrôle (exercice 10.1, question 17).

Cette seconde démonstration est généralisable à l'écoulement potentiel autour d'autres types d'objets, pour peu que la solution potentielle composite soit une bonne approximation loin de l'obstacle ! (théorème de Kutta-Joukowski)

- (Comme remarqué précédemment, la fonction Ψ est multi-valuée et sa détermination principale est discontinue)

Signification de la solution composite

Bien qu'elle ne vérifie pas exactement les conditions limites de ce problème, la solution composite représente bien l'écoulement observé expérimentalement autour d'un cylindre tournant, lorsque $Re = Ua/\nu \gtrsim 10^4$ et $|\alpha| = |\Omega a/(2\pi U)| \gtrsim 4$. La circulation est alors donnée par $\Gamma = 2\pi\Omega a^2$.

$\Rightarrow$ La mise en rotation conduit donc à l'apparition d'une force de portance $|F_y| \approx 2\pi\rho\Omega a^2 HU$.

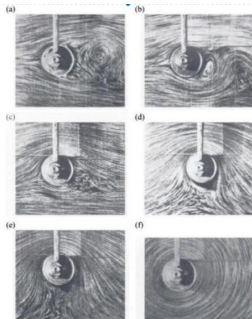


FIGURE 2.22 – Visualisations de l'écoulement d'eau autour d'un cylindre en rotation à $Re = 10^4$, Prandtl (1961)[139] ; (a), $\alpha = 0$; (b), $\alpha = 1$; (c), $\alpha = 2$; (d), $\alpha = 4$; (e), $\alpha = 6$; (f), $\alpha = \infty$



a) Buckau ou Baden-Baden



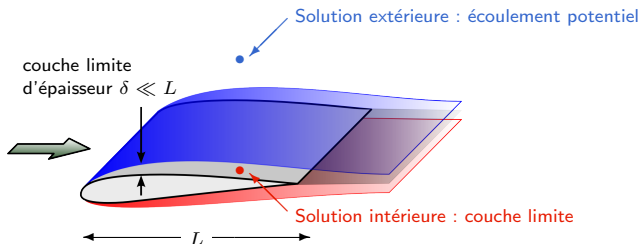
b) Alcýone

Application : turbovoiles.

Écoulement autour d'un profil d'aile

On montre (cf. programme de master) que si l'angle d'incidence n'est pas trop élevé, l'écoulement peut être décomposé en deux parties :

- Solution extérieure potentielle.
Peut être calculé à partir de la **théorie des profils portants**.
→ permet de calculer la portance F_y .
- Solution intérieure visqueuse.
Peut être calculée à partir de la **théorie de la couche limite de Prandtl**.
→ permet de calculer la traînée F_x .



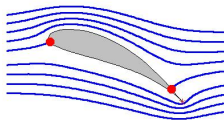
Notions sur la théorie des profils portants

L'écoulement potentiel autour d'un profil d'aile peut se déduire de la solution autour du cylindre par une transformation conforme (cf. programme M1).

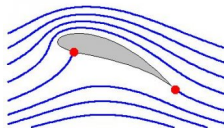
Tout comme dans le cas du cylindre, la solution n'est pas unique mais définie à une constante Γ près (la circulation).

Celle-ci fixe la portance en vertu du théorème de Kutta : $F_y = -\rho U_0 \Gamma$

La "bonne" valeur de Γ est celle qui conduit à un écoulement régulier au bord de fuite : condition de Kutta.



Solution avec $\Gamma \neq -\pi U c(\alpha - \alpha_0)$
Condition de Kutta non vérifiée



Solution avec $\Gamma = -\pi U c(\alpha - \alpha_0)$
Condition de Kutta vérifiée

En notant α l'angle d'incidence du profil (en radians) et S sa corde (largeur) on montre que :

- Pour un profil symétrique $\Gamma = -\pi U c \alpha \rightarrow F_y = \pi \rho c U^2 \alpha$
- Pour un profil cambré $\Gamma = -\pi U c(\alpha - \alpha_0) \rightarrow F_y = \pi \rho c U^2 (\alpha - \alpha_0)$

Notions sur la théorie de Prandtl

La **théorie de Prandtl (1905)** permet de décrire l'écoulement dans la couche limite en proche paroi. (cf. programme de master) :

- Si $Re < 10^5$ la couche limite est laminaire, et la force de frottement est donnée par une loi généralisant celle de Blasius vue au chapitre 6. :

$$F_v = \frac{\rho S U^2}{2} C_f(Re) \text{ avec } C_f(Re) = \beta Re^{-1/2}$$

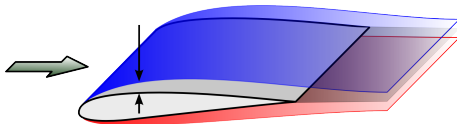
Le coefficient β vaut $= 1.328$ dans le cas d'une plaque plane (cf. chapitre 6), et prend des valeurs comprises entre 1 et 3 pour des profils d'ailes classiques.

- Si $Re > 5 \cdot 10^5$ la couche limite est turbulente.

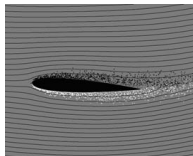
On utilise alors des lois empiriques pour estimer la force de frottement. Par exemple :

$$F_v \approx \rho S U^2 (\log_{10}(Re) - 2)^{-2}$$

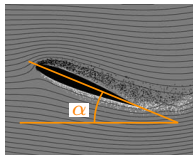
(cf. Chapitre 6 et formulaire, section H.)



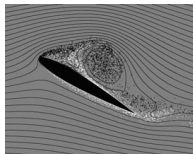
Écoulement autour d'un profil d'aile : cas des fortes incidences



incidence faible



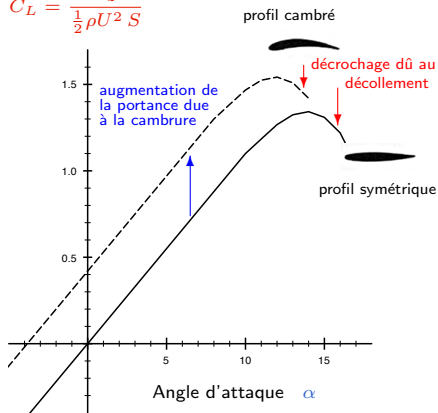
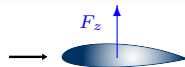
incidence modérée



incidence forte

Coefficient de portance

$$C_L = \frac{F_z}{\frac{1}{2} \rho U^2 S}$$



S : surface de l'aile, U : vitesse incidente