

Mécanique des fluides

David FABRE

IMFT / UPS

Département de Mécanique



Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821–1894) tenant dans ses mains le résonateur acoustique qui porte son nom, photographié ci-contre.

11. Acoustique et ondes de choc

11. Acoustique et ondes de choc

- Acoustique linéaire
 - Modélisation
 - Equation de Helmholtz
 - Ondes planes
 - Ondes progressives monochromatiques
 - Réflexions d'ondes plane sur une extrémité
 - Ondes sphériques
 - Intensité acoustique
- Ondes de choc
 - Introduction
 - Onde de choc droit : résolution
- Ressaut hydraulique

Questions de cours sur le chapitre 11

Questions de cours :

1. Après avoir précisé les hypothèses de la modélisation, établir l'équation de Helmholtz gouvernant la propagation des ondes acoustiques.
2. Donnez la solution générale de cette équation pour les ondes monodimensionnelles.
3. Donnez la solution de cette équation représentant l'onde sphérique générée par une source compacte.
4. A l'aide de bilans intégraux sur un volume élémentaire convenablement défini, écrire 4 relations de saut permettant de calculer les quantités à l'aval du choc (u_2, p_2, T_2, ρ_2) en fonction des quantités à l'amont du choc (u_1, p_1, T_1, ρ_1) .

Exercices de cours :

1. Réflexion d'une onde plane sur une extrémité ouverte ou fermée.
2. Haut-parleur sphérique.

Cadre de la modélisation

Cadre :

Les ondes acoustiques sont de petites perturbations autour d'un état de base caractérisé par des propriétés thermodynamiques uniformes (identiques en tout point) et "au repos", c'est à dire

$$p = p_0, \quad T = T_0, \quad \rho = \rho_0, \quad \vec{u} = \vec{u}_0 = \vec{0}.$$

Objectif :

déterminer l'évolution de ces "petites perturbations" :

Variable	Ordre de grandeur :	Hypothèse :
$p' = (p - p_0)$	$p' = \mathcal{O}(p_1)$	$p_1 \ll p_0$
$\rho' = (\rho - \rho_0)$	$\rho' = \mathcal{O}(\rho_1)$	$\rho_1 \ll \rho_0$
$T' = (T - T_0)$	$T' = \mathcal{O}(T_1)$	$T_1 \ll T_0$
$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{u}_0$	$ \vec{u}' = \mathcal{O}(u)$	$u \ll c_0$

Hypothèses :

- on négligera tous les termes non linéaires (de la forme $u' \cdot u'$, $u' \cdot \rho'$, ...)
- les effets dissipatifs (viscosité et conduction thermique) sont négligeables.
- gravité non pertinente.

Remarque : la seule échelle de vitesse est $c_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$ déjà introduite aux chapitres 1 et 8.

Echelle de temps associée : $\tau_{ac} = L/c_0$

Conservation de la quantité de mouvement : Analyse dimensionnelle

Sous ces hypothèses l'équation de Navier-Stokes se simplifie alors en :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} = -g \vec{\text{rad}} p'$$

Justification plus rigoureuse par analyse dimensionnelle (cf. chapitres 5 et 9) :

$$\underbrace{\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}}_{\mathcal{I}} + \underbrace{\rho g \vec{\text{rad}}(\vec{u})) \cdot \vec{u}}_{\mathcal{C}} = \underbrace{-g \vec{\text{rad}} p}_{\mathcal{P}} + \underbrace{\mu (\Delta \vec{u} + g \vec{\text{rad}}(\text{div}(\vec{u})/3))}_{\mathcal{V}}$$

$$\frac{\rho_0 u}{\tau_{ac}} = \frac{\rho_0 u c_0}{L} \quad \frac{\rho_0 u^2}{L} \quad \frac{p_1}{L} \quad \frac{\mu u}{L^2}$$
(1)

Régime Acoustique : le terme dominant est $\mathcal{I}$.

- $\frac{[\mathcal{C}]}{[\mathcal{I}]} \ll 1 \iff \frac{u}{c_0} = Ma \ll 1$
- $\frac{[\mathcal{V}]}{[\mathcal{I}]} \ll 1 \iff \frac{c_0 L}{\nu} \ll 1$

(Remarque : Dans un gaz $\nu \approx v_q \ell$ où ℓ est le libre parcours moyen et $v_q \approx c_0$ la vitesse quadratique moyenne (cf. Chap. 3).

Donc $\frac{c_0 L}{\nu} \approx L/\ell = Kn$. Le terme visqueux est donc effectivement négligeable à partir du moment où l'hypothèse du milieu continu est vérifiée !)

- Le PMD permet de déterminer la jauge de pression $[p'] : \frac{[\mathcal{P}]}{[\mathcal{I}]} \approx 1 \iff [p'] = \rho_0 c_0 u$.

Conservation de la masse : analyse dimensionnelle

De même l'équation de continuité se simplifie sous la forme :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{u}' = 0 \quad (2)$$

Justification plus rigoureuse par analyse dimensionnelle (cf. chapitres 5 et 9) :

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\substack{\mathcal{I} \\ \frac{[\rho']}{\tau_{ac}}}} + \underbrace{\vec{u} \cdot \operatorname{grad}(\rho)}_{\substack{\mathcal{C} \\ \frac{[\rho']u}{L}}} + \underbrace{\rho \operatorname{div}(\vec{u})}_{\substack{\mathcal{D} \\ \frac{\rho_0 u}{L}}} = 0 \quad (3)$$

Régime Acoustique : le terme dominant est $\mathcal{I}$.

- $\frac{[\mathcal{C}]}{[\mathcal{I}]} \ll 1 \iff \frac{u}{c_0} = Ma \ll 1$
- PMD : $\frac{[\mathcal{D}]}{[\mathcal{I}]} \approx 1 \implies \frac{[\rho']}{\rho_0} = \frac{u}{c_0}$.

Compressibilité : évolution thermodynamique

Si les mécanismes de diffusion (viscosité et conduction thermique) sont négligeables, l'évolution est **isentropique**

$$\frac{ds}{dt} = 0$$

Justification plus rigoureuses à partir de l'équation-bilan de l'entropie massique s (cf. MMC et Formulaire, annexe C.6)

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \vec{\tau} : \vec{\text{grad}}(\vec{u}) + k |\vec{\text{grad}}T|^2 \quad (4)$$

Dans ce cas un développement limité de la relation d'état sous la forme $p = p(\rho, s)$ conduit à : $p' = c_0^2 \rho'$, avec :

$$c_0^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s$$

On a déjà introduit cette échelle de vitesse dans le chapitre 1 (analyse dimensionnelle).

On va démontrer dans la suite de ce chapitre qu'il s'agit bien de la **vitesse des ondes sonores**.

Vitesse du son : ordre de grandeur

$$c_0^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$$

- **Cas d'un gaz parfait** : On peut partir de la loi de Laplace

$$p\rho^{-\gamma} = cte$$

ce qui conduit directement à :

$$c_0^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0} = \gamma r T_0$$

Ordre de grandeur : Air dans les C.N.T.P : $c_0 \approx 340m/s$.

- **Cas des liquides** : Il n'y a pas d'équivalent de la loi de Laplace, mais on la compressibilité peut être mesurée expérimentalement à travers le **coefficient de compressibilité isentropique** χ_s :

$$\chi_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s$$

On a alors :

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}$$

Ordre de grandeur : Eau dans les C.N.T.P : $\chi_s = 5 \times 10^{-10} Pa^{-1}$ donc $c_0 \approx 1500m/s$.

Equation de Helmholtz

Les équations du modèle mis en place précédemment s'écrivent donc, pour les perturbations en vitesse $\vec{u}'$, en pression p' et masse volumique ρ' :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{u}' = 0 \quad (5)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} + \operatorname{grad} p' = \vec{0} \quad (6)$$

$$p' = c_0^2 \rho' \quad (7)$$

Par combinaison de ces trois équations, on montre que les perturbations vérifient l'équation de l'acoustique linéaire

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta p' = 0 \quad (\text{équation de HELMHOLTZ}) \quad (8)$$

Démonstration :

La première équation s'écrit aussi : $\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{u}'$. Dérivons par rapport au temps cette équation, et prenons la divergence de la seconde. Il reste à soustraire les deux équations, la vitesse disparaît grâce à l'identité $\partial/\partial t(\operatorname{div} \vec{u}') = \operatorname{div}(\partial \vec{u}'/\partial t)$.

Ondes planes : solutions

On peut rechercher des solutions générales de l'équation de Helmholtz sous la forme d'ondes, appelées ondes acoustiques (cf. cours M1). On se restreint ici à l'étude des ondes **planes**, solutions de la forme

$$\vec{u}' = u'(x, t) \vec{e}_x, \quad p' = p'(x, t).$$

Dans ce cas l'équation de Helmholtz s'écrit sous la forme suivante (également appelée Equation de d'Alembert) :

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0 \quad (9)$$

On remarque que cette équation peut se factoriser sous la forme :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) p' = 0$$

$$\text{Ou encore } \frac{\partial}{\partial x_+} \frac{\partial}{\partial x_-} p' = 0$$

avec le changement de variable $x_+ = x - c_0 t$ et $x_- = x + c_0 t$

(En effet $\frac{\partial}{\partial x_+} = \frac{dx}{dx_+} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dt}{dx_+} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t}$; de même pour $\frac{\partial}{\partial x_-}$).

On en déduit qu'une solution générale peut se mettre sous la forme :

$$p' = f(x_+) + g(x_-)$$

$$\text{soit : } p'(x, t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)$$

Cette solution s'interprète comme la superposition de deux **ondes planes progressives** se propageant en direction contraire.

Ondes planes progressives

Considérons plus particulièrement la solution

$$p' = f(x_+) = f(x - c_0 t)$$

Interprétation :

$x_+ = x - c_0 t$ est la coordonnée dans un référentiel se déplaçant à la vitesse $+c_0$

=> la perturbation de pression associée à l'onde se déplace à la vitesse $+c_0$

Illustrations multimédia :

http://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/waves_superposition_reflection.htm#travelling

On montre de plus que la perturbation de vitesse u' associée est donnée par :

$$u' = \frac{1}{\rho_0 c_0} f(x - c_0 t)$$

Démonstration : Cette relation se déduit de l'équation de qdm qui s'écrit ici :

$$\rho \partial u' / \partial t = -\partial p' / \partial x.$$

=> la vitesse est proportionnelle à la perturbation de pression **et de même signe**.

De même on interprète la solution $p' = g(x_-) = g(x + c_0 t)$

comme une onde se propageant à la vitesse $-c_0$,

Et on montre que la perturbation de vitesse associée est $u' = \frac{-1}{\rho_0 c_0} g(x + c_0 t)$.

=> pour cette seconde solution la vitesse est proportionnelle à la perturbation de pression **et de signe opposé**.

Ondes progressives monochromatiques

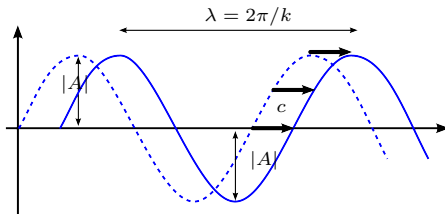
Considérons un cas particulier important :

$$p' = f(x_+) = A \cos(kx_+ + \varphi_A) \equiv A \cos(k(x - c_0 t) + \varphi_A)$$

On appelle cette solution une Onde plane progressive monochromatique.

Celle-ci s'écrit également :

$$p'(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \varphi_A) \equiv \operatorname{Re} \left[\underline{A} e^{i(kx - \omega t)} \right] \quad \text{avec } \underline{A} = A e^{i\phi_A}$$



La perturbation de vitesse associée s'écrit :

$$u'(x, t) = \frac{A}{\rho c_0} \cos(kx - \omega t + \varphi_A)$$

Illustration multimédia :

http://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/travelling_sine_wave.htm

Illustrations avec le programme `wavesimulator.m`

- $\underline{A}$: amplitude de pression
($\underline{A}$ amplitude complexe)
- $k = 2\pi/\lambda$: nombre d'onde (en rad/m)
- $\lambda = 2\pi/k$: longueur d'onde
- $\omega = 2\pi/T$: pulsation (en rad/s)
- $f = 1/T = \omega/2\pi$: fréquence (en Hz)
- $T = 2\pi/\omega$: période (en s)
- $c = \omega/k$: vitesse de phase (ou célérité)
- Par construction $c = c_0$ pour une onde plane acoustique.

Ondes planes : réflexion sur une extrémité fermée

Étudions la propagation d'une onde plane dans un tube de section constante occupant la région ($x < 0$), **fermé** à son extrémité droite ($x = 0$).

La pression est solution de l'équation des ondes et doit de plus vérifier la condition limite

$$\left. \frac{\partial p'}{\partial x} \right|_{x=0} = 0.$$

(qui provient de la condition $u'(0, t) = 0$.)

Supposons que pour $t < 0$ la solution est une onde propagative provenant de la droite :

$p'(x, t) = f(x - c_0 t)$, où f est par exemple une impulsion Gaussienne : $f(s) = ae^{-s^2}$.

Cette solution ne peut pas être valable $\forall t$ car elle ne vérifie pas la condition limite en $x = 0$!

Solution : il faut inclure une seconde onde propagative représentant la réflexion.

$$p'(x, t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)$$

La condition $u'(x = 0, t)$ conduit à la conclusion que **L'onde de pression se réfléchit en gardant le même signe.**

Démo :

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = f'(x - c_0 t) + g'(x + c_0 t), \quad \text{et donc : } \left. \frac{\partial p'}{\partial x} \right|_{x=0} = f'(-c_0 t) + g'(c_0 t) = 0.$$

En appelant s l'argument de la fonction g , on a $f'(-s) + g'(s) = 0$. En intégrant une fois par rapport à s : $f(-s) = g(s) + Cte$. La constante est nulle (car pour une onde localisée, de type impulsion Gaussienne, f et g doivent tendre vers 0 quand s tend vers $\pm\infty$).

Illustrations multimédia :

http://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/waves_superposition_reflection.htm#travelling

(Voir animation "Reflexion on free end", pour le cas de la réflexion d'une onde de torsion sur une extrémité libre, qui est

Ondes planes : réflexion sur une extrémité ouverte

De même, pour un tuyau semi-infini et ouvert à la position $x = 0$ (en contact avec l'atmosphère ambiante de pression $p \approx p_0$), la solution doit vérifier la condition limite $p'(0, t) = 0$.

On justifie de la même manière qu'une onde simple ne convient pas et qu'il faut chercher a nouveau la solution comme somme d'une onde incidente et d'une onde réfléchie.

$$p'(x, t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)$$

Cette fois-ci la condition $p'(x = 0, t) = 0$ conduit à la conclusion que **L'onde de pression se réfléchit en changeant de signe.**

Démo : $p'(x = 0, t) = [f(-c_0 t) + g(+c_0 t)] = 0$. Donc $g(s) = -f(-s)$.

Illustrations multimédia :

http://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/waves_superposition_reflection.htm#travelling

(Voir animation "Reflexion on fixed end", pour le cas de la réflexion d'une onde de torsion sur une extrémité fixe, qui est mathématiquement analogue).

Remarque : une modélisation plus fine montre que la condition $p' = 0$ est en réalité à appliquer à une distance Δ de l'extrémité du tuyau, où Δ est une "correction de longueur" donnée par $\Delta \approx 0.61D$ où D est le diamètre du tuyau.

L'onde se réfléchit donc (en changeant de signe) à la position $x = \Delta$ et non à la position $x = 0$.

Reflexions d'ondes planes : conséquences

- Sur une extrémité fermée, une onde plane de pression se réfléchit en gardant le même signe.
- Sur une extrémité ouverte, une onde plane de pression se réfléchit en changeant de signe.

Conséquence :

la fréquence fondamentale d'un tuyau "ouvert-ouvert" (flûte) vaut $f = c/2L$ et celle d'un tuyau ouvert-fermé (clarinette) vaut $f = c/4L$.

Illustrations avec le programme `wavesimulator.m`
Illustration multimédia :

<http://newt.phys.unsw.edu.au/jw/flutes.v.clarinets.html>

On verra une seconde démonstration de ces relations dans le TD 11.1

Illustrations multimedia

Ondes progressive (impulsion)

http://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/waves_superposition_reflection.htm#travelling

Onde progressive sinusoidale

http://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/travelling_sine_wave.htm

Reflexion sur une discontinuité (ondes sur une corde)

http://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/waves_superposition_reflection.htm#densities

Flutes et clarinettes

<http://newt.phys.unsw.edu.au/jw/flutes.v.clarinets.html>

Un bon point de départ pour en savoir plus :

http://www.editions.polytechnique.fr/files/pdf/EXT_0840_2.pdf

Ondes sphériques

Considérons des ondes décrites en coordonnées sphériques sous la forme

$$p' = p'(r, t); \vec{u}' = u(r, t)\vec{e}_r.$$

En utilisant l'expression de l'opérateur Laplacien en coordonnées sphériques, l'équation de Helmholtz s'écrit :

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = c_0^2 \nabla^2 p' \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rp') \quad (10)$$

La solution générale peut s'écrire sous la forme :

$$p'(r, t) = \frac{f(r - c_0 t)}{r} + \frac{g(r + c_0 t)}{r}$$

On reconnaît une onde divergente f et une onde convergente g .

Dans le cas d'une onde acoustique générée par une source compacte (c.a.d. de dimensions petite par rapport à la longueur d'onde acoustique), seule l'onde divergente est pertinente.

Application : le haut-parleur sphérique

Exercice de cours : Haut-parleur sphérique.

Considérons une source sphérique de rayon a , et supposons que la pression à sa surface (en $r = a$) est donnée par

$$p'(a, t) = P(t)$$

On montre [Démonstration] que la pression est donnée par :

$$p'(r, t) = \frac{a}{r} P \left(t - \frac{r - a}{c_0} \right)$$

Conséquences :

- Le signal de pression perçu à la position r et à l'instant t correspond à celui qui a été émis par la source à l'instant $t - \frac{r-a}{c_0}$
- L'amplitude de ce signal de pression décroît en $1/r$. L'énergie associée décroît en $1/r^2$.
Ce qui est logique, car l'énergie acoustique émise se répartit sur une sphère de surface $4\pi r^2$ et le flux total d'énergie est conservé !
- Autrement dit, l'intensité acoustique décroît de 20 décibels par décade. C'est à dire que quand la distance à la source est multipliée par 10, l'énergie acoustique est divisée par 100 (et décroît donc de 20 décibels).

Intensité acoustique : définition

Comment mesure-t-on l'énergie transportée par une onde acoustique ?

Définition : on appelle **intensité acoustique** la quantité vectorielle suivante :

$$\vec{I} = p' \vec{u}'$$

Il s'agit d'une puissance surfacique (en W/m^2).

Cette quantité est directement reliée à la puissance transmise à travers une surface S séparant deux domaines (1) et (2) :

$$\mathcal{P}_{S,1 \rightarrow 2} = \iint_S \vec{I} \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} dS.$$

On remarque que pour une onde plane monochromatique d'amplitude A , de la forme $p' = A \cos[k(x - ct)]$, l'intensité acoustique (moyennée pendant une période d'oscillation) a pour expression :

$$\overline{I_{a,x}} = \frac{A^2}{2\rho c}$$

Niveau acoustique

En pratique les énergies acoustiques correspondant aux fréquences audibles varient sur 6 ordres de grandeur. Il est donc plus commode d'utiliser une échelle logarithmique.

Définition pratique : on appelle niveau acoustique la quantité

$$L_{a,dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{|\vec{I}_a|}{I_{a,0}} \right)$$

où $I_{a,0}$ est une valeur de référence, fixée à $I_{a,0} = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ (1 picowatt par mètre carré).

Pour une onde plane d'amplitude $A = |p'|$, cette expression s'écrit également :

$$L_{a,dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{|p'|}{p_0} \right)$$

où p_0 est le niveau de pression correspondant à la plus faible amplitude audible ($p_0 = 20 \mu\text{Pa}$).

Ordres de grandeurs :

- Seuil d'audibilité : $L_{a,dB} = 0\text{dB}$, c.a.d. $|p'| \approx 20 \mu\text{Pa}$
- Appartement calme : $L_{a,dB} = 40\text{dB}$, c.a.d. $|p'| \approx 2\text{mPa}$
- Conversation courante : $L_{a,dB} = 60\text{dB}$, c.a.d. $|p'| \approx 20\text{mPa}$
- Concert : $L_{a,dB} \leq 102\text{dB}$ (décret 2017), c.a.d. $|p'| \leq 2\text{Pa}$
- Seuil de douleur : $L_{a,dB} = 120\text{dB}$, c.a.d. $|p'| \approx 20\text{Pa}$

Ondes de choc : problématique

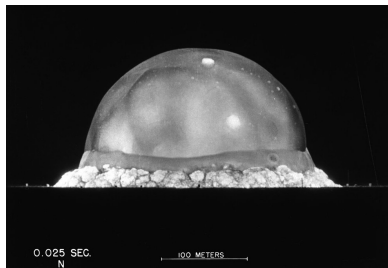
Dans le cadre de la section précédente, on s'était limité à des perturbations de faible amplitude : $|u| \ll c_0$; $|p'| \ll p_0$,

Que se passe-t-il si l'on génère une perturbation de pression et/ou de vitesse d'amplitude importante ?

En pratique ce type de problème se rencontre dans deux principaux contextes :

- **Les explosions** (au niveau de la source on a $|p'| \gg p_0$)
- **Le déplacement supersonique** (un objet se déplace dans un fluide à une vitesse $u > c_0$).

Exemples d'ondes de choc : explosions

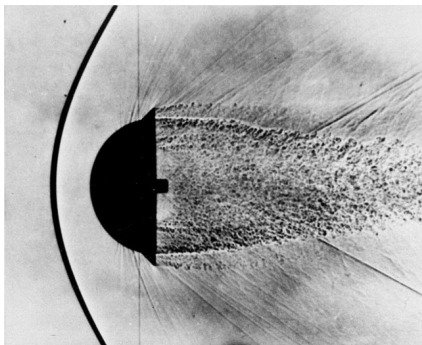


The expanding fireball and shockwave of the Trinity explosion, seen .025 seconds after detonation on July 16, 1945. (U.S. Department of Defense)

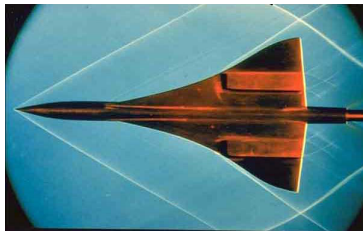


The USS Iowa is firing shells from its cannon that travel about twice the speed of sound. While the shells themselves will likely produce their own shock waves as they travel through the air, it is the shock wave caused by the explosion of the cannons that is visible on the water.

Exemples d'ondes de choc : objet en déplacement supersonique



"Choc en arc" devant un projectile supersonique



Maquette du Concorde
en soufflerie supersonique

Exemples d'ondes de choc : Super-Sonic Car (SSC)



Modélisation

Hypothèses :

- gaz parfait
- forces de volume (gravité) négligées
- phénomènes dissipatifs (viscosité et transfert thermique) négligés
- pas de réaction chimique
- **Choc droit** : plan et perpendiculaire à l'écoulement (supposé dans la direction x).
(choc oblique ou choc courbe : voir cours M1)
- Le choc va être considéré comme une **discontinuité** des propriétés physiques.
(épaisseur du choc supposée nulle).

En se plaçant dans le repère du choc (supposé fixe et situé à la position $x = 0$), on va considérer l'écoulement comme **stationnaire** .

En amont ($x < 0$) les conditions sont $u_1, p_1, \rho_1, T_1, c_1 = \sqrt{\gamma r T_1}$

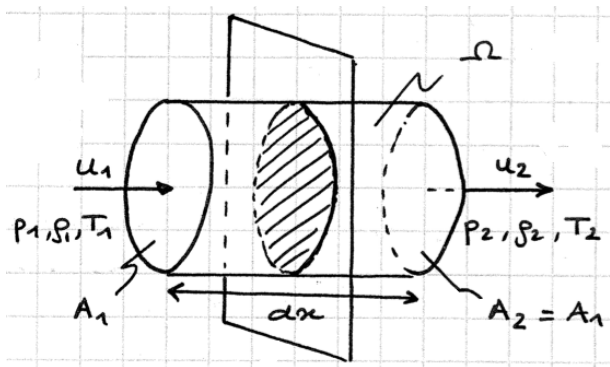
En aval ($x > 0$) les conditions sont $u_2, p_2, \rho_2, T_2, c_2 = \sqrt{\gamma r T_2}$

Remarque : cette modélisation dans le repère du choc est adaptée à l'étude des objets en déplacement supersonique (et aussi à l'écoulement dans une tuyère qui sera vue au chapitre 12).

Par simple changement de repère, cette situation est équivalente à un choc se déplaçant **vers la gauche** à la vitesse $-U_1$ dans un écoulement préalablement au repos. La vitesse derrière le choc est alors $-(U_1 - U_2)$

Volume de contrôle

Soit le volume de contrôle fixe infinitésimal Ω , de normale sortante $\vec{n}$, suivant :



On notera par l'indice 1 toute quantité physique *juste avant le choc* (amont), et par l'indice 2 toute quantité physique *juste après le choc* (aval).

Bilans de masse et de quantité de mouvement

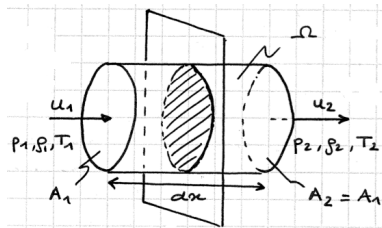
Bilan intégral de masse :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho dV = - \oint_{\partial\Omega} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS$$

$$\Rightarrow 0 = \rho_1 u_1 A_1 - \rho_2 u_2 A_2$$

D'où

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (11)$$



Bilan intégral de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{u} dV = - \oint_{\partial\Omega} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS - \oint_{\partial\Omega} p \vec{n} dS$$

$$\Rightarrow 0 = \rho_1 u_1^2 A_1 - \rho_2 u_2^2 A_2 + p_1 A_1 - p_2 A_2$$

D'où

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (12)$$

Bilan d'énergie

Bilan intégral d'énergie (cf. chapitre 8) :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) dV \\
 &= - \oint_{\partial\Omega} \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) \vec{u} \cdot \vec{n} dS \\
 &\quad + \oint_{\partial\Omega} -p \vec{n} \cdot \vec{u} dS + \dot{W}^{v,ext} + \dot{Q}^{ext} \\
 &\Rightarrow \oint_{\partial\Omega} \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho} \right) \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0 \\
 &\Rightarrow \rho_1 u_1 A_1 \left(e_1 + \frac{1}{2} u_1^2 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) - \rho_2 u_2 A_2 \left(e_2 + \frac{1}{2} u_2^2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right) = 0
 \end{aligned}$$

Or $\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2$: $\Rightarrow e_1 + \frac{1}{2} u_1^2 + \frac{p_1}{\rho_1} = e_2 + \frac{1}{2} u_2^2 + \frac{p_2}{\rho_2}$

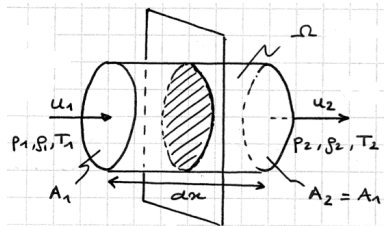
En introduisant l' enthalpie spécifique $h = e + p/\rho = c_p T$, on aboutit à :

$$c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad (13)$$

Ici $c_p = (\partial h / \partial T)_p$; pour un gaz parfait $c_p = \gamma r / (\gamma - 1)$.

Remarque : enthalpie totale $H = h + u^2/2 \Rightarrow H_1 = H_2$

donc **l'enthalpie totale est conservée à la traversée du choc !**



Résolution

On ajoute à ces trois équations **l'équation d'état** du gaz parfait, qui peut s'écrire $\frac{p}{\rho T} = r$.

Les conditions en amont (u_1, p_1, ρ_1, T_1) étant supposées connues, on a 4 équations à 4 inconnues :

$$\begin{aligned}\rho_1 u_1 &= \rho_2 u_2 \\ p_1 + \rho_1 u_1^2 &= p_2 + \rho_2 u_2^2 \\ c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} &= c_p T_2 + \frac{u_2^2}{2} \\ \frac{p_1}{\rho_1 T_1} &= \frac{p_2}{\rho_2 T_2}\end{aligned}$$

La résolution (cf. Exercice complémentaire 11.0), permet de calculer les variations de toutes les quantités physiques, ainsi que le nombre de Mach aval $M_2 = u_2/c_2$, en fonction du nombre de Mach amont $M_1 = u_1/c_1$:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1)^2 M_1^2} (2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma) \quad (14)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) \quad (15)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} = \frac{u_1}{u_2} \quad (16)$$

$$M_2 = \sqrt{\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma}} \quad (17)$$

Ces relations sont tabulées dans le formulaire (section I, page 15)

Remarque sur l'entropie

Les relations précédentes nous disent que M_2 est une fonction décroissante de M_1 et admettent deux types de solutions :

- Des solutions de type "choc" pour lesquelles $M_1 > 1$, $M_2 < 1$ et $p_2/p_1 > 1$.
- Des solutions de type "anti-choc" pour lesquelles $M_1 < 1$, $M_2 > 1$, et $p_2/p_1 < 1$.

Les deux types de solutions sont-elles physiquement acceptables ?

Pour répondre à cette question calculons le **saut d'entropie** a travers le choc.

Rappel de thermo : pour un gaz parfait $s = c_v \ln(p \rho^{-\gamma}) + Cte$

On en déduit le saut d'entropie :

$$\begin{aligned}\Delta s &= [s_2 - s_1] = c_v \ln \left[\frac{p_2}{p_1} \times \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma \right] \\ &= c_v \ln \left[\left(1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right) \times \left(\frac{(\gamma+1)M_1^2}{2 + (\gamma-1)M_1^2} \right)^\gamma \right]\end{aligned}$$

L'étude de la fonction Δs montre que : $\Delta s > 0$ lorsque $M_1 > 1$, et $\Delta s < 0$ lorsque $M_1 < 1$.

Conséquence :

Le second principe impose donc que seule la solution "choc" peut exister.

La solution de type "anti-choc" n'est pas physiquement admissible.

Épaisseur du choc ?

Dans la modélisation adoptée, on a considéré le choc comme une discontinuité d'épaisseur nulle.

Cherchons ici à estimer l'épaisseur caractéristique δ du choc.

En supposant que les équations de Navier-Stokes restent valables dans l'épaisseur du choc, on va estimer δ par analyse dimensionnelle :

Partons de la composante selon x de l'équation de Navier-Stokes¹ :

$$\underbrace{\rho \frac{\partial u}{\partial t}}_{\mathcal{I}} + \underbrace{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}}_{\mathcal{C}} = - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{\mathcal{P}} + \underbrace{\frac{4\mu}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\mathcal{V}} \quad (18)$$

0 $\frac{\rho_1 c_1^2}{\delta}$ $\frac{p_1}{\delta}$ $\frac{\mu c_1}{\delta^2}$

Dans l'estimation des ordres de grandeurs, on a supposé que l'ordre de grandeur des vitesses est fixée par la vitesse du son en amont : $[u] = c_1$.

Le principe de moindre dégénérescence permet alors de déterminer δ :

$$[\mathcal{C}] = [\mathcal{V}] \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{\mu}{\rho c_1}$$

Application numérique : pour l'air à température ambiante, on trouve $\delta \approx 10^{-8} m$.

Cette estimation de l'épaisseur est du même ordre de grandeur que l'échelle microscopique ℓ .

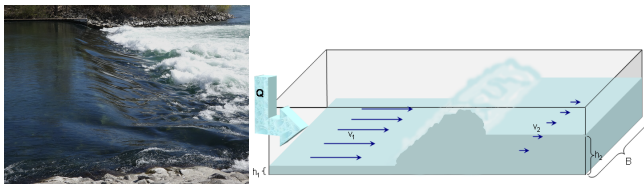
L'hypothèse $Kn \gg 1$ n'est donc pas vérifiée, ce qui signifie que **l'approche milieu continu n'est pas valable dans l'épaisseur du choc** !

Une résolution par des équations "locales" n'est donc pas possible ; en revanche la résolution par méthodes intégrales conduite dans ce chapitre reste justifiée.

1. Le facteur $4\mu/3$ vient de la loi rhéologique du "gaz Stokesien". Le cas plus classique du "Fluide Newtonien" conduit à un facteur 2μ . Ceci ne change rien à l'analyse dimensionnelle effectuée ici.

Ressaut hydraulique

Il existe une analogie directe entre une onde de choc et un ressaut hydraulique (cf. TD 8.1).



Onde de choc :

Ecoulement supersonique

$$U > c$$



Ecoulement sous-sonique

$$U < c$$

$$c = \sqrt{\gamma r T}$$

vitesse du son.

Ressaut hydraulique :

Ecoulement **supercritique**

$$U > c$$



Ecoulement **sous-critique**

$$U < c$$

$$c = \sqrt{gH}$$

vitesse des **ondes de surface (vagues)**.