

David FABRE

IMFT / UPS

Département de Mécanique



Tuyère de fusée V2 de la seconde guerre mondiale.

12. Ecoulements compressibles

Objectifs du chapitre :

- Introduire les équations régissant l'écoulement stationnaire d'un gaz compressible dans l'approximation monodimensionnelle.
- Déterminer la forme optimale à donner à une tuyère de moteur-fusée pour optimiser la poussée.

12. Ecoulements compressibles

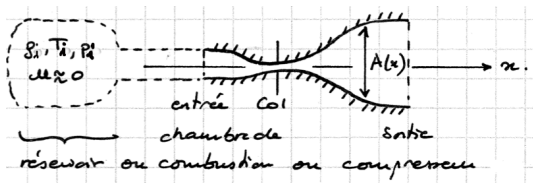
- Cadre de l'étude et hypothèses de modélisation
- Equations sous forme globale et différentielle
- Relations de Barré–Saint Venant
- Equation d'Hugoniot
- Régimes d'écoulement dans une tuyère

Questions de cours :

1. A partir d'un bilan intégral d'énergie, montrez que l'enthalpie totale $h + \frac{u^2}{2}$ est conservée dans un écoulement compressible stationnaire monodimensionnel.
2. En déduire la première relation de Saint-Venant.
3. Après avoir justifié que l'écoulement est isentropique, en déduire les seconde et troisième relations de Saint Venant.
4. Ecrire sous forme différentielle les bilans de masse, quantité de mouvement et énergie massique pour un écoulement compressible monodimensionnel.
5. A partir de celles-ci, démontrez les relations d'Hugoniot et discutez leur conséquence sur le fonctionnement d'une tuyère.
6. Décrire les différents régimes de fonctionnement d'une tuyère selon les valeurs du rapport de détente p_i/p_{ext} .

Exercices de cours :

1. Ecoulement dans une tuyère (Chassaing, p. 249).



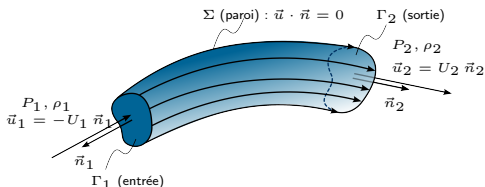
Hypothèses de ce chapitre :

- Gaz parfait.
- Écoulement Inertiel ($Re \gg 1$) : frottement visqueux négligés
- Conduction thermique négligée ($Pe = \frac{UL}{\kappa} \gg 1$).
- Pas de restriction sur le nombre de Mach ($M = \mathcal{O}(1)$).
- Gravité négligeable.
- Écoulement stationnaire.
- ✓ **Écoulement monodimensionnel** : $\vec{u}(x, y, z, t) \approx u(x) \vec{e}_x$
 $\rho(x, y, z, t) \approx \rho(x), \quad p(x, y, z, t) \approx p(x), \quad T(x, y, z, t) \approx T(x), \dots$
 (valable si les variations de section sont faibles ; $\partial A / \partial x \ll 1$).
- Écoulement continu (pas de choc), sauf au dernier paragraphe.

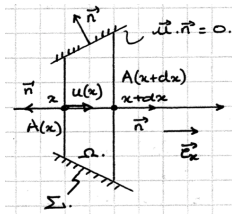
Equations-bilans sous l'hypothèse monodimensionnelle : principe

On a besoin d'écrire les équations-bilan de masse, énergie totale et entropie :

- Sous forme **globale** sur une section de conduite d'aire d'entrée A_1 et d'aire de sortie A_2 ;



- Sous forme **différentielle** sur une section élémentaire de longueur dx .



Bilan de masse

Bilan intégral de masse :

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho dV} = - \oint_{\partial\Omega} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS$$

Soit, sous l'hypothèse monodimensionnelle :

$$\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2, \quad \text{soit} \quad \rho u A = \dot{m}$$

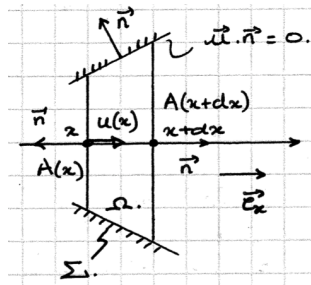
Ici $\dot{m}$ est le débit de masse à travers la tuyère (en kg/s).

Sous forme différentielle, cette relation s'écrit :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0$$

Démonstrations :

- (a) On écrit $\rho(x)A(x)U(x) = \rho(x+dx)A(x+dx)U(x+dx)$
soit $\rho Au = (\rho + d\rho)(A + dA)(u + du) = \rho Au + Aud\rho + \rho u dA + \rho A du$ soit encore $Aud\rho + \rho u dA + \rho A du = 0$. On divise ensuite par ρAu .
- (b) On prend la différentielle logarithmique de $\dot{m}$:
 $d \ln(\dot{m}) = d \ln(\rho U A) = d(\ln \rho + \ln U + \ln A) = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0$.



Bilan de quantité de mouvement

Bilan intégral de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{u} dV + \oint_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} [\rho \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n}) + p \vec{n}] dS = - \oint_{\Sigma} p \vec{n} dS$$

(Cette formule permet de calculer la force exercée sur la tuyère (théorème d'Euler), mais ne sera pas utilisée pour la résolution de l'écoulement.)

La forme locale s'écrit :

$$\rho u du + dp = 0$$

Démonstration simple : a partir de l'équation d'Euler projetée dans la direction x :

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

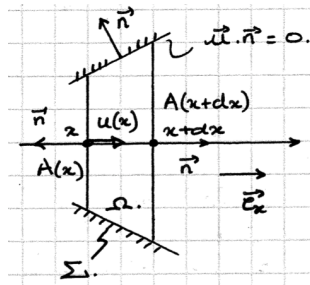
Remarque : cette première démonstration donne la bonne expression mais n'est pas rigoureuse, car ici u est la vitesse moyenne sur la tranche. Pour une démonstration plus rigoureuse partons de la forme globale, qui s'écrit, en notant que sur la surface latérale on a $\vec{e}_x \cdot \vec{n} dS = -dA = -\frac{dA}{dx} dx$:

$$(\rho_2 u_2^2 + p_2) A_2 - (\rho_1 u_1^2 + p_1) A_1 = \int_1^2 p(x) \frac{dA}{dx} dx$$

Ce qui s'écrit également :

$$\dot{m}(u_2 - u_1) = (p_1 A_1 - p_2 A_2) + \int_1^2 p(x) \frac{dA}{dx} dx = - \int_1^2 A \frac{dp}{dx} dx$$

Dans la limite $dx \rightarrow 0$, on obtient donc : $\rho u A du + A dp = 0$, soit encore : $\rho u du + dp = 0$



Bilan d'énergie

- Sous forme intégrale, le bilan d'énergie totale s'écrit (cf. chapitre 8) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) dV + \oint_{\partial\Omega} \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \oint_{\partial\Omega} (-p\vec{n}) \cdot \vec{u} dS + \dot{W} + \dot{Q}$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$\oint_{\partial\Omega} \rho \left(h + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad \text{où} \quad h = e + \frac{p}{\rho} \text{ est l'enthalpie massique.}$$

Ce qui conduit à : $\dot{m} \left(h_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) = \dot{m} \left(h_2 + \frac{u_2^2}{2} \right)$, c.a.d. $h + \frac{u^2}{2} = Cte.$

Ce qui indique la **conservation de l'enthalpie totale** dans l'écoulement.

- Sous forme différentielle, ceci se met également sous la forme

$$dh + u du = 0$$

- Remarque importante** : la conservation de l'enthalpie totale est vraie sous des hypothèses plus générales. En effet, dans le cas stationnaire et en négligeant les effets dissipatifs et les forces de volume, le bilan local d'énergie s'écrit :

$$\rho \frac{d}{dt} \left(h + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) = 0.$$

(cf. chapitre 8 et formulaire, section C.3, formule C.10)

Bilan d'entropie

Considérons maintenant le bilan d'entropie. Cette équation est en fait une relation redondante avec les 2 précédentes. En effet :

- Sous forme différentielle, on peut déduire ds des équations précédentes, en partant de la relation suivante issue du cours de thermodynamique :

$$dh = Tds - \frac{1}{\rho} dp$$

En combinant les bilans de quantité de mouvement et d'enthalpie, ceci conduit à
[Démonstration :]

$$ds = 0.$$

- Sous forme globale, le bilan d'entropie s'écrit alors :

$$s_1 = s_2 \quad \text{c.a.d.} \quad s = \text{Cte}$$

L'écoulement est donc **isentropique**. C'est cohérent avec l'hypothèse faite en début de chapitre selon laquelle on néglige les phénomènes dissipatifs (frottement visqueux et conduction thermique).

Equation d'état

Pour fermer le problème, ajoutons comme dernière relation l'équation d'état mécanique que l'on écrira :

- Sous forme globale

$$p = \rho r T$$

- Sous forme différentielle :

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}$$

Récapitulatif : relations globales

Voyons tout d'abord quelles conséquences on peut tirer des relations globales.

Parmi les 5 relations établies, conservons le bilans de masse, d'énergie, d'entropie et l'équation d'état (et oublions le bilan de QDM qui est redondant).

On a donc les quatre équations suivantes :

$$\rho u A = Cte \equiv \dot{m}, \quad (1)$$

$$h + \frac{1}{2} u^2 = Cte \equiv h_i, \quad (2)$$

$$p/(\rho T) = Cte \equiv r, \quad (3)$$

$$s = Cte \equiv s_i, \quad (4)$$

Le problème est donc bien posé : il permet bien (formellement) de calculer les 4 inconnues $u(x)$, $\rho(x)$, $p(x)$ et $T(x)$ en fonction de la loi de section $A(x)$, des conditions amont (h_i et s_i), des propriétés du gaz parfait (r et γ), et du débit de masse $\dot{m}$.

Conditions génératrices

Définition : Conditions génératrices

Supposons qu'en amont de la tuyère on a un récipient de grande dimension où la vitesse est négligeable ($u \approx 0$) et où les variables thermodynamiques ont pour valeur les "conditions génératrices" $p_i; \rho_i; T_i, h_i; c_i$.

Alors la conservation de l'enthalpie totale peut se mettre sous les formes équivalentes suivantes :

- $h + \frac{u^2}{2} = h_i$
 h_i est l'enthalpie génératrice (enthalpie d'un "point d'arrêt" de l'écoulement où $u = 0$).
- $c_p T + \frac{u^2}{2} = c_p T_i$
 T_i est la température génératrice.
- $\frac{c^2}{\gamma-1} + \frac{u^2}{2} = \frac{c_i^2}{\gamma-1}$
 $c_i = \sqrt{\gamma r T_i}$ est la vitesse du son correspondant aux conditions génératrices.
- $\frac{T}{T_i} = \frac{c^2}{c_i^2} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-1}$

Cette dernière forme est appelée **1ère relation de (Barré de) St Venant**.

Relations de Saint Venant

Le fait que l'écoulement est isentropique permet d'utiliser les **relations de Laplace**.

Celles-ci permettent alors de déterminer les conditions de l'écoulement en tout point en fonction du nombre de Mach local et des conditions génératrices.

Ce sont les **Relations de (Barré de) Saint-Venant** :

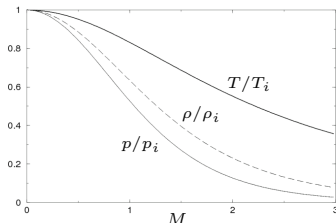
$$\begin{aligned}
 \text{[Démonstration]} \quad \rightarrow \quad \frac{T}{T_i} &= \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-1}; \quad \frac{\rho}{\rho_i} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \\
 \frac{p}{p_i} &= \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}; \quad u = M \sqrt{\gamma r T_i} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-1/2}
 \end{aligned}$$

Ces relations sont tabulées dans le formulaire (section I, page 12).

Remarques :

tous les rapports T/T_i , ρ/ρ_i et p/p_i sont des fonctions décroissantes du nombre de Mach M .

u est par contre une fonction croissante du nombre de Mach M .



Récapitulatif des équations locales

Les relations de Barré–St Venant permettent de déterminer les conditions de l'écoulement en toute position x en fonction du nombre de Mach local $M(x)$ et des conditions génératrices ; mais on n'a pour l'instant pas de loi donnant $\bar{M}$ en fonction de x , ni d'expression pour le débit de masse $\dot{m}$.

Pour finir la résolution, repartons donc des équations sous forme différentielle.

Conservons les formes différentielles des bilan de masse, de quantité de mouvement et d'énergie, et d'entropie (ce dernier étant équivalent à la relation de Laplace reliant p et ρ).

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (5)$$

$$\rho u du + dp = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{du}{u} = -\frac{1}{\gamma M^2} \frac{dp}{p} \quad (6)$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{p} \quad (7)$$

Relation d'Hugoniot

En combinant les équations écrites précédemment, on démontre la relation de **Hugoniot** reliant les variations de vitesse dans une conduite de section variable $A(x)$:

$$\frac{du}{u} = -\frac{1}{1-M^2} \frac{dA}{A}$$

On montre de même pour l'évolution de la pression :

$$\text{[exercice]} \rightarrow \frac{dp}{p} = \gamma \frac{M^2}{1-M^2} \frac{dA}{A}$$

Conséquences :

- Pour un écoulement subsonique :
 Dans une section **convergente** ($A \searrow$), alors $u \nearrow$ et $p \searrow$ (effet Venturi classique).
 Dans une section divergente ($A \nearrow$), alors $u \searrow$ et $p \nearrow$.
- Si l'écoulement est supersonique c'est l'inverse !
 Dans une section convergente ($A \searrow$), alors $u \searrow$ et $p \nearrow$
 Dans une section **divergente** ($A \nearrow$), alors $u \nearrow$ et $p \searrow$.
- Pour accélérer l'écoulement tout le long de la tuyère il faut donc que celle-ci présente un **col** correspondant à un minimum de la section A_c . On a alors nécessairement **$M = 1$ au col**.

Si ces conditions sont réunies on dit que **la tuyère est amorcée**.

Calcul de l'écoulement dans la tuyère

Revenons au calcul de l'écoulement dans la tuyère.

En supposant celle-ci **amorcée**, on peut tout d'abord déduire le débit de masse à partir des relations de Barré de St-Venant appliquées au col ($M = 1$) :

$$\dot{m} = \dot{m}_{amorce} = \rho_c u_c A_c = \beta \rho_i \sqrt{\gamma r T_i} A_c \quad \text{avec } \beta = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \approx 0.5787$$

Démo : on exprime u_c et ρ_c à partir des relations de Barré de Saint Venant avec $M = 1$.

On remarque que **le débit de masse est entièrement fixé par la dimension du col et les conditions génératrices** (indépendantes de la pression en sortie de tuyère !)

Pour pouvoir déterminer les conditions en tout point de la tuyère il reste maintenant à déterminer la relation entre A et M . En écrivant $\dot{m} = \rho(M)u(M)A = \rho_c u_c A_c$ on trouve **[exercice]** :

$$\frac{A}{A_c} = \frac{\beta}{M} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Remarque : pour $A/A_c > 1$ cette relation donne deux valeurs possibles de M , l'une subsonique (applicable avant le col) et l'autre supersonique (applicable après le col).

Utilisation pratique :

Pour résoudre un problème on pourra utiliser les **tables d'écoulements compressibles isentropiques** (cf. Formulaire), donnant $P/P_i, \rho/\rho_i, T/T_i, A/A_c$ en fonction de M .

Exercice

Exercice d'application (Chassaing, p. 249)

Un réservoir contient de l'air sec à une pression $P_i = 10\text{Bars}$, et une température de $T_i = 300\text{K}$. Cet air s'écoule à travers une tuyère de section au col $A_c = 755\text{mm}^2$ et de section de sortie $A_s = 1272\text{mm}^2$.

L'écoulement est supposé amorcé et isentropique.

A l'aide des tables d'écoulements isentropiques et/ou du programme nozzleGUI.m, calculez :

(a) le débit-masse,

(b) les conditions en sortie.

(c) mêmes questions pour une section de sortie $A_s = 1980\text{mm}^2$.

Les conditions de sortie sont-elles compatibles avec une sortie à l'air libre dans une atmosphère standard ($p_0 = 1\text{bar}$) ? ?

(d) Quelle valeur de la section de sortie permet d'avoir un écoulement parfaitement adapté en sortie si la tuyère fonctionne au niveau du sol ? ($p_s = p_0 = 1\text{bar}$) ?

Réponses :

(a) $\dot{m} = 1.763\text{kg/s}$

(b) On a $A_s/A_c = 1272/755 = 1.685$. On cherche cette valeur dans la table, on la trouve à deux endroits correspondant respectivement à $M = 0.35$ et $M = 2$. La tuyère étant amorcée c'est la deuxième valeur (supersonique) qui est la bonne. A partir des valeurs lues sur la ligne correspondante de la table, on en déduit $p_s = 0.1277p_i = 1.277\text{bars}$, $T_s = 0.5525T_i = 166\text{K}$, $u_s = 2\sqrt{\gamma r T_s} = 516\text{m/s}$.

(c) Avec $A_s/A_c = 2.622$ on trouve : $M = 2.5$, $p_s = 0.0586p_i = 0.586\text{bars}$. Cette pression est inférieure à la pression ambiante !

(d) On veut avoir un rapport de détente $p_s/p_i = 0.1$. En cherchant dans la table on trouve que cette valeur est sur la ligne $M = 2.16$, sur cette même ligne on lit $A_s/A_c = 1.9226$ donc $A_s = 1451\text{mm}^2$.

Bilan sur le fonctionnement d'une tuyère (1)

Considérons une tuyère de dimensions donnée (sections A_c au col et A_s en sortie).
Récapitulons les écoulements possibles selon la valeur du rapport de détente $P = p_i/p_{ext}$:

- Pour $p_i/p_{ext} = 1$: Pas d'écoulement.
- Pour $1 < p_i/p_{ext} < P_1$: écoulement subsonique dans la totalité de la tuyère ($\dot{m} < \dot{m}_{amorce}$)
- Pour $p_i/p_{ext} = P_1$: écoulement sonique au col ($\dot{m} = \dot{m}_{amorce}$) puis redevient subsonique
- (...)
- Pour $p_i/p_{ext} = P_2$: écoulement sonique au col ($\dot{m} = \dot{m}_{amorce}$) puis supersonique dans le divergent. (On parle de tuyère adaptée).
- (...)

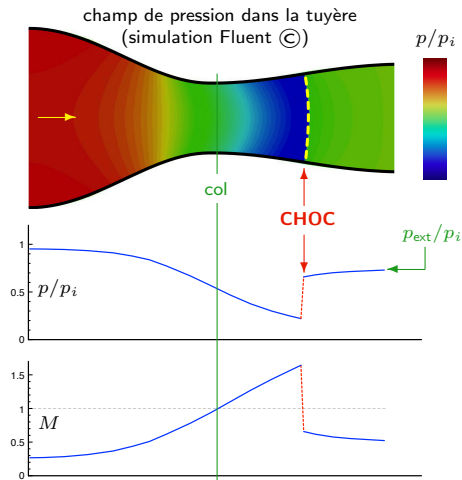
Exercice : A l'aide des tables d'écoulement isentropique et/ou du programme nozzleGui.m, déterminez P_1 et P_2 dans les cas $A_s/A_c = 1.685$ et $A_s/A_c = 2.622$.

Question : que se passe-t-il pour d'autres valeurs possibles du rapport de détente $P = p_i/p_{ext}$?

Régime discontinu d'une tuyère amorcée

Si $P_1 < p_s/p_{ext} < P_2$ La pression doit nécessairement remonter pour s'adapter aux conditions rencontrées en sortie de tuyère .

La seule manière est de le faire de manière brutale (non isentropique) à travers une **Onde de choc**.



→ existence d'un choc d'adaptation dans le divergent

→ après le choc, l'écoulement redevient subsonique et décélère (cf. relation d'Hugoniot)

Ce régime de fonctionnement est donc à éviter puisqu'il ne permet pas d'accélérer continûment l'écoulement jusqu'en sortie de tuyère.

Il n'est alors pas possible d'obtenir une poussée optimale.

Remarque : pour des rapports de détente élevés on peut également avoir un **choc oblique** en sortie de tuyère. (Illustrations : programme NOZZLEGUI.M).

Bilan sur le fonctionnement d'une tuyère (2)

On peut donc compléter la liste des écoulements possibles selon la valeur du rapport de détente $P = p_i/p_{ext}$:

- Pour $p_i/p_{ext} = 1$: Pas d'écoulement.
- Pour $1 < p_i/p_{ext} < P_1$: écoulement subsonique dans la totalité de la tuyère ($\dot{m} < \dot{m}_{amorce}$)
- Pour $p_i/p_{ext} = P_1$: écoulement sonique au col ($\dot{m} = \dot{m}_{amorce}$) puis redevient subsonique
- Pour $P_1 < p_i/p_{ext} < P_2$: écoulement sonique au col ($\dot{m} = \dot{m}_{amorce}$) puis supersonique, puis choc, puis l'écoulement redevient subsonique
- Pour $p_i/p_{ext} = P_2$: écoulement sonique au col ($\dot{m} = \dot{m}_{amorce}$) puis supersonique dans le divergent. (On parle de tuyère adaptée).
- Pour $p_i/p_{ext} > P_2$: écoulement sonique au col ($\dot{m} = \dot{m}_{amorce}$) puis supersonique dans le divergent, puis formation d'une onde de détente en sortie (écoulement surdétendu).

On peut montrer que parmi tous ces cas celui permettant de maximiser la poussée est le cas adapté.