

Mécanique des fluides



David FABRE

IMFT / UPS
Département de Mécanique

Photo : le Vasa, navire de guerre suédois construit et chaviré en 1628 ; renfloué en 1961, visitable à Stockholm.

2. Forces de pression dans un fluide – Hydrostatique

Questions de cours :

1. Quelle est la signification microscopique de la pression et de la température dans un gaz ?
2. Justifiez "avec les mains" que la pression dans un gaz est proportionnelle à la masse volumique et à la température (comme indiqué par la loi d'état $P = \rho r T$ d'un gaz parfait).
3. Énoncez la loi de l'hydrostatique reliant le gradient de pression et l'accélération de gravité dans un fluide au repos. Expliquez (en une phrase, sans donner d'équations) le principe de la démonstration.
4. Énoncez le théorème d'Archimède et démontrez-le par la méthode de votre choix.
5. Discutez les conditions d'équilibre d'un sous-marin. Montrez en illustrant par des schémas que l'équilibre est stable si G est situé en dessous de C .
6. Cette conclusion est-elle la même dans le cas d'un bateau ? Pourquoi ? illustrez également par des schémas.

Exercices de cours :

1. Donnez la loi de pression $p(z)$ dans une atmosphère isotherme.
2. Montrez que la résultante de pression exercée sur un barrage rectangulaire de hauteur H et largeur L vaut $\rho g L H^2 / 2$, et que le centre de poussée C est situé à l'altitude $H/3$ par rapport au fond.

Sommaire

2. Forces de pression dans un fluide – Hydrostatique

- Pression (et température) : signification physique.

 - Définitions

 - Notions de théorie cinétique

 - Cas des gaz

 - Cas des liquides

- Hydrostatique

 - Loi de l'hydrostatique

 - Efforts de pression sur une surface

 - Poussée d'Archimède

 - Equilibre des corps flottants

Pression : définition(s)

- **Définition Thermodynamique** (pour un système simple)

Pression = variable intensive reliée aux variations d'énergie engendrée par des variations de volume au cours de transformations réversibles

$$p = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S = \rho \left(\frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_s$$

(ici S est l'énergie interne ; e l'énergie interne massique ; S est l'entropie ; s l'entropie massique).

(Définition théorique rigoureuse mais inutilisable avec les modèles de fluides les plus courants, pour lesquels l'entropie massique s n'est pas une variable pratique et l'énergie interne est connue sous la forme $e = e(T, P)$).

- **Définition mécanique**

Pression = force surfacique normale exercée par un fluide au repos sur une surface matérielle (frontière avec une paroi solide) ou fictive (séparant avec un autre domaine fluide).

En considérant une surface élémentaire (au sens de la MMC) dS de normale $\vec{n}_{\mathcal{F} \rightarrow S}$, la force élémentaire exercée par le fluide sur la surface vaut

$$d\vec{f}_{\mathcal{F} \rightarrow S} = p \vec{n}_{\mathcal{F} \rightarrow S} dS$$

Lien entre les 2 définitions :

En supposant que la surface S subit un déplacement élémentaire (au sens de la thermo) $\delta \vec{X}$, le travail reçu par le fluide vaut :

$$\delta W = \iint_S \delta \vec{X} \cdot (p \vec{n}_{S \rightarrow \mathcal{F}} dS)$$

En supposant la pression uniforme il vient $\delta W = -p dV$ avec $dV = \iint_S \delta \vec{X} \cdot \vec{n}_{\mathcal{F} \rightarrow S} dS$.

- **Définition cinétique**

La force de pression correspond à la variation par unité de temps de la quantité de mouvement des particules contenues dans le volume fluide, lorsque celles-ci rebondissent sur la surface S (si celle-ci est une paroi solide) ou la traversent (si celle-ci est une surface fictive).

Notions de théorie cinétique (I)

Illustration en BD : [l'aspirisouffle](#), pp. 19-24.

Considérons un volume de contrôle mésoscopique de volume V_{meso} occupé par N particules (de même masse m_p et vitesse individuelle $\vec{v}_i(t)$).

Sous l'hypothèse du milieu continu $Kn \ll 1$ (cf. chap. 1), on peut faire des moyennes sur le volume mésoscopique et définir successivement :

- La masse volumique

$$\rho = \frac{Nm_p}{V_{meso}},$$

- La vitesse moyenne

$$\vec{u} = \frac{1}{N} \sum_{i \in V_{meso}} \vec{v}_i,$$

Remarques :

- On peut définir un volume mésoscopique $V_{meso}(\vec{x}, t)$ et faire des statistiques sur celui-ci au voisinage de chaque point de l'espace de position $\vec{x} = (x, y, z)$ et à chaque instant t .
Les quantités ρ et $\vec{u}$ sont donc un champ scalaire $\rho(\vec{x}, t)$ et un champ vectoriel $\vec{u}(\vec{x}, t)$ correspondant à la "masse volumique locale" et la "vitesse locale du fluide".
- Le fluide est dit "au repos" si $\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{0}$ en tout point $\vec{x}$ de l'espace et en tout instant t .

Notions de théorie cinétique (II)

Dire que le fluide est "au repos" ne veut pas dire que les vitesses individuelles $\vec{v}_i$ des particules sont toutes nulles ! Cet effet s'appelle **l'agitation thermique**, et est mesuré de deux manières :

- A l'échelle microscopique par la **vitesse quadratique moyenne**

$$v_q^2 = \frac{1}{N} \sum_{i \in V_{meso}} |\vec{v}_i|^2$$

- A l'échelle macroscopique par la **température** :

$$T = \frac{v_q^2}{3r} \quad \text{où } r = R/M \text{ est la constante du gaz, en } J/K/kg$$

Démonstration : cette définition de la température est justifiée en invoquant le principe d'équipartition de l'énergie, (cf. cours thermo L2 ; wikipedia), qui stipule que chaque contribution quadratique élémentaire à l'énergie totale a, en moyenne, la même valeur, et que cette valeur moyenne vaut (par convention) $k_B T/2$ où $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} m^2 kg s^{-2} K^{-1}$ est la **constante de Boltzmann**.

Ici on a 3 contributions à l'énergie totale car $|\vec{v}_i|^2 = v_{i,x}^2 + v_{i,y}^2 + v_{i,z}^2$.

L'énergie cinétique microscopique due aux mouvements de translation des particules est donc

$$E_k = N \times 3 \times \frac{k_B T}{2} = \frac{3nRT}{2} \quad \text{où } R = \mathcal{N}k_B = 8.314 m^2 kg s^{-2} K^{-1} mol^{-1}.$$

D'autre part : $E_k = \sum_{i \in V_{meso}} \frac{m_p |\vec{v}_i|^2}{2} = Nm_p v_q^2 / 2 = nM v_q^2 / 2$, avec $M = \mathcal{N}m_p$ la masse molaire.

Remarques :

- Ordre de grandeur : dans l'air ($r = 287 J/kg/K$) à température ambiante ($T = 288 K$), $v_q \approx 500 m/s$.
- La quantité T ainsi définie est de nouveau un champ scalaire $T(\vec{x}, t)$ (de même pour v_q).
- Si le fluide n'est pas au repos, la définition de la vitesse quadratique moyenne est :

$$v_q^2 = \frac{1}{N} \sum_{i \in V_{meso}} |\vec{v}_i - \vec{u}|^2$$

Il s'agit d'une mesure de la dispersion des vitesses par rapport à un référentiel se déplaçant à la vitesse moyenne $\vec{u}$.

Origine physique de la pression : cas des gaz

Dans un gaz parfait les particules n'interagissent que par des collisions (sur une paroi ou entre elles).

Illustrations avec le programme [kinetics.m](https://www.kinetics.mcgill.ca/)

La théorie cinétique permet de calculer p en fonction des propriétés microscopiques (cf. Guyon, Hulin, Petit ; cours Thermo L2).

Calcul simplifié de la force de pression **exercée sur une paroi** (identifiée à la variation de qdm due aux impacts sur celle-ci) :

$$p = \underbrace{\frac{n}{6} v_q}_{\text{flux de particules impactant la paroi}} \times \underbrace{2m_p v_q}_{\text{variation de qdm au cours d'un impact}}$$

où $n = N/V_{\text{meso}} = \rho/m_p$ est la densité volumique de particules.

Ce qui aboutit à l'équation d'état mécanique :

$$p = \rho r T$$

La théorie cinétique permet donc de donner un sens à la pression en termes microscopiques et de démontrer l'équation d'état la reliant à la température et à la masse volumique.

Interprétation "avec les mains" : $p \propto \rho$ (plus il y a de particules plus il y a de chocs), et $p \propto T$ (plus les particules sont agitées plus les forces transmises par les chocs sont intenses)

Remarques :

- On peut de la même manière estimer la force de pression **exercée entre deux volumes fluides adjacents**. La formule est la même en remplaçant la notion d'impacts sur la paroi par celle de **transferts de particules** à travers la frontière (fictive) entre les deux volumes.
- On définit donc ainsi un champ scalaire $p(\vec{x}, t)$ en tout point $\vec{x}$ (situé sur la paroi ou à l'intérieur du fluide).

Origine physique de la pression : cas des liquides

Dans un liquide la pression est due aux liaisons entre les molécules adjacentes, qui sont par définition des interactions répulsives à courte distances ($f_{ij} > 0$ lorsque $d_{ij} < r_0$) et attractives à plus grande distance ($f_{ij} < 0$ lorsque $d_{ij} > r_0$) .

Remarques :

1. Les liaisons sont très "raides" et il est difficile de faire varier la distance inter-molécule ($d_{ij} \approx r_0$).
Ceci justifie que les liquides sont très peu compressibles.
2. Cas idéalisé : Modèle "liquide incompressible, indilatable" : $\rho = \rho_0 = C_{te}$.
 $\partial\rho/\partial p \approx 0 \rightarrow \rho$ et p sont découplés.
Dans ce modèle p devient une variable mécanique qui n'est plus reliée à la thermodynamique.
3. La pression dans un liquide peut ainsi être négative (liaisons majoritairement attractives).
Cet état est métastable du point de vue thermo mais peut tout de même être observé dans la nature (sève dans les arbres de plus de 10m...)

Statique des fluides

Loi de l'hydrostatique

Pour un fluide au repos ($\vec{u} = \vec{0}$) dans un référentiel galiléen, soumis à un champ de force massique $\vec{g}$ constant (en général la gravité) :

$$g \vec{\text{rad}} p = \rho \vec{g}$$

Démonstration :

Equilibre des forces sur un volume élémentaire de fluide dV , de masse $dm = \rho dV$:

Applications :

1/ Liquide incompressible de masse volumique uniforme ρ (océan)

$$p = p_0 - \rho g z$$

(Modèle plus précis incluant la thermocline, cf exercice 2.3)

2/ Modèle d'atmosphère isotherme (d'une planète ou d'une étoile) (*exercice de cours*) :

$$p = p_0 e^{-\frac{g z}{r T_0}}$$

(Modèle plus précis dit "atmosphère standard" : cf. exercice 2.2).

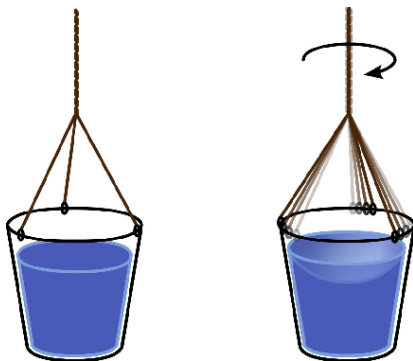
Statique des fluides en repère non galiléen

Cas d'un référentiel non galiléen

Pour un fluide "au repos" dans un référentiel non galiléen il faut ajouter les pseudo-forces d'inertie (accélération d'entraînement $\vec{a}_e$).

$$g \vec{\text{rad}} p = \rho (\vec{g} + \vec{a}_e)$$

Exemple d'un liquide dans un récipient cylindrique en rotation ("Seau de Newton") :



(Exercice classique ; cf. L2)

Les surfaces de même pression (surfaces isobares) sont des paraboles (y compris la surface libre en négligeant la tension superficielle).

Efforts de pression sur une surface

Soit une surface $\mathcal{S}$ (matérielle ou non) délimitant (partiellement ou totalement) un fluide F à l'équilibre. Soit M un point courant de $\mathcal{S}$ et $\vec{n}_{\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{S}}$ un vecteur normal orienté du fluide vers la surface ("entrant"). Les efforts exercés par F sur $\mathcal{S}$ (efforts hydrostatiques) sont données par le torseur suivant :

$$\{\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{S}\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{F} \\ \vec{\mathcal{M}}_A \end{array} \right\}} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} \iint_{\mathcal{S}} p(M) \vec{n}_{\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{S}} dS \\ \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{AM} \times p(M) \vec{n}_{\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{S}} dS \end{array} \right\}}$$

Remarques :

- Dans le cas d'une surface fermée délimitant un objet Ω plongé dans le fluide, la convention habituelle est de noter $\vec{n}$ la normale sortante (par rapport à l'objet). Dans ce cas on peut utiliser les formules précédentes en écrivant $\vec{n}_{\mathcal{F} \rightarrow \Omega} = -\vec{n}$.
- On appelle point d'application "le" point C tel que $\vec{M}_C = 0$.
(définition non rigoureuse car ce point n'est pas unique ; on peut choisir n'importe quel point situé sur la "droite d'action" $\mathcal{D}_A$ du torseur).

Exercices classiques :

- Calculez la résultante des forces de pression sur un barrage rectangulaire vertical de hauteur H . Montrez que le point d'application est situé à une altitude $H/3$ par rapport au fond (*Exercice de cours*)
- Barrage triangulaire (*Exercice préparatoire 2.0, corrigé sur le site web du cours*).

Théorème d'Archimède

Tout corps plongé entièrement dans un (ou plusieurs) fluide(s) au repos, subit de la part du (des) fluide(s) une force verticale, dirigée vers le haut, égale en intensité au poids du volume de fluide déplacé. Cette force "s'applique" au centre de gravité G_f du(des) fluide(s) déplacé(s). (Plus rigoureusement, la droite d'application de son torseur passe par G_f .)

En termes plus précis, la poussée d'Archimède correspond au torseur suivant :

$$\{\mathcal{A}\}_{G_f} = \begin{cases} \vec{F}_A = -M_f \vec{g} \\ \vec{M}_{A,G_f} = \vec{0} \end{cases}$$

Démonstrations : (i) physique ; (ii) mathématique.

Remarques :

- en général $G_f \neq G$ (G est le centre de gravité du corps considéré, et dépend de la répartition de masse à l'intérieur de celui-ci).
- Si le fluide déplacé a une masse volumique constante ρ_f , alors $M_f = \rho_f V$, et le point G_f correspond au centre géométrique C de l'objet.
- La somme de la force de gravité $M\vec{g}$ et de la poussée d'Archimède est parfois appelée "poids relatif" ou "flottabilité" (buoyancy) : $\vec{F} = (M - M_f)\vec{g}$.

Equilibre des corps flottants (1)

Cas d'un corps de masse m et volume V entièrement immergé dans un fluide homogène de masse volumique ρ_f (sous-marin ou montgolfière).

Recherchons les conditions d'équilibre sous l'effet de son poids $\{\mathcal{G}\}$ et de la poussée d'Archimède $\{\mathcal{A}\}$.

$$\sum \vec{F} = m\vec{g} - \rho_f V \vec{g}$$

$$\sum \vec{M}_C = \overrightarrow{CG} \wedge m\vec{g} - \overrightarrow{CC} \wedge \rho_f V \vec{g}.$$

Equilibre des résultantes : $m = \rho_f V$.

→ Conséquence : le véhicule doit pouvoir contrôler sa masse en fonction du milieu environnant ! (Rôle des ballasts pour un sous-marin, ou du chauffage du gaz intérieur pour une montgolfière).

Equilibre des moments : $\overrightarrow{CG} \wedge m\vec{g} = \vec{0}$.

→ Conséquence : C et G doivent être alignés verticalement

Remarque : cette condition définit deux états d'équilibre possibles.
Seul l'état où G est situé au dessous de C est stable !

Equilibre des corps flottants (2)

Cas d'un corps de masse m partiellement immergé dans un liquide homogène de masse volumique ρ_f (bateau)

Equilibre des résultantes : $m = \rho_f V_0$ où V_0 est le "volume de carène" (volume de la partie immergée)

→ Conséquence : l'équilibre reste possible si m varie.

Equilibre des moments : (Notons C_0 le centre de carène dans la position d'équilibre)

$$\sum \vec{M}_{C_0} = \overrightarrow{C_0 G} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{C_0 C_\phi} \wedge \vec{F}_A = \overrightarrow{C_\phi G} \wedge m\vec{g}$$

Subtilité : lorsque l'inclinaison (gîte) ϕ varie, le centre de carène C_ϕ se déplace !

Si la carène est suffisamment large, il est possible que la position d'équilibre soit stable même si G est au dessus de C_0 !

On peut montrer qu'il existe un point M appelé Métacentre de roulis qui se situe sur la droite d'application de la poussée d'Archimède $\forall \phi$ (dans la limite $\phi \ll 1$).

On peut donc écrire :

$$\overrightarrow{C_0 C_\phi} \wedge \vec{F}_A = \overrightarrow{C_0 M} \wedge \vec{F}_A$$

et donc

$$\sum \vec{M}_{C_0} = \overrightarrow{M G} \wedge m\vec{g}$$

Le critère de stabilité est donc : G doit être en dessous de M .

La position de M est donné par la formule de Bouguier

$$C_0 M = \frac{L b^3}{12 V_0} \quad (\text{cas particulier pour une carène prismatique, de longueur } L \text{ et largeur à la flottaison } b).$$

Questions de cours sur le chapitre 2

Questions de cours :

1. Quelle est la signification microscopique de la pression et de la température dans un gaz ?
2. Justifiez "avec les mains" que la pression dans un gaz est proportionnelle à la masse volumique et à la température (comme indiqué par la loi d'état $P = \rho r T$ d'un gaz parfait).
3. Énoncez la loi de l'hydrostatique reliant le gradient de pression et l'accélération de gravité dans un fluide au repos. Expliquez (en une phrase, sans donner d'équations) le principe de la démonstration.
4. Énoncez le théorème d'Archimède et démontrez-le par la méthode de votre choix.
5. Discutez les conditions d'équilibre d'un sous-marin. Montrez en illustrant par des schémas que l'équilibre est stable si G est situé en dessous de C .
6. Cette conclusion est-elle la même dans le cas d'un bateau ? Pourquoi ? illustrez également par des schémas.

Exercices de cours :

1. Donnez la loi de pression $p(z)$ dans une atmosphère isotherme.
2. Montrez que la résultante de pression exercée sur un barrage rectangulaire de hauteur H et largeur L vaut $\rho g L H^2 / 2$, et que le centre de poussée C est situé à l'altitude $H/3$ par rapport au fond.