

Mécanique des fluides

David FABRE

IMFT / UPS
Département de Mécanique
david.fabre@imft.fr



Enroulement d'un filet de miel. Patricia ERN © IMFT

3. Viscosité et Rhéologie ; Ecoulements parallèles stationnaires



Questions de cours sur le chapitre 3

Questions de cours :

1. Quels sont, dans un gaz, les mécanismes physiques microscopiques responsables du phénomène de viscosité ?
2. Même question pour un liquide.
3. Qu'appelle-t-on un fluide Newtonien ?
4. Quelles sont les principales classes de fluides Non newtoniens ? Représentez schématiquement les lois rhéologiques correspondantes. Donnez un exemple de chaque type et expliquez quels mécanismes physiques sont à l'origine du comportement mécanique observé.
5. Montrez par un bilan de forces sur un volume élémentaire qu'un écoulement parallèle stationnaire de la forme $\vec{u} = u(y)\vec{e}_x$ obéit à l'équation :

$$\underbrace{\rho g_x - \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right]}_{=Cte} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Exercices de cours :

1. Ecoulement de Poiseuille plan.
2. Ecoulement de film tombant. (voir aussi chapitre 5)

3. Viscosité et Rhéologie

■ Rhéologie

- Définitions

- Cas des gaz

- Cas des liquides "simples"

- Cas des liquides "complexes"

- Compléments : lois rhéologiques instationnaires

■ Ecoulements visqueux parallèles stationnaires

- Mise en équation

- Solutions classiques stationnaires (rappels L2)

- Ecoulements parallèles cylindriques

Définitions

En plus d'une force normale (pression, chap. 2), on constate qu'un fluide en mouvement peut exercer sur une surface S une **force tangentielle**.

Commençons par caractériser cette force dans le cas simple d'un écoulement plan parallèle stationnaire :

$$\vec{u} = u(y)\vec{e}_x$$

Définitions :

- On appelle **contrainte visqueuse** τ_{xy} la force tangentielle Par unité de surface, exercée **dans la direction x** sur une facette d'orientation normale y , par le demi-espace y^+ sur le demi-espace y^- .

$$d\vec{F}_{(y^+) \rightarrow (y^-)} = (-p\vec{e}_y + \tau_{xy}\vec{e}_x) dS$$

- On appelle **taux de cisaillement local** la quantité $\dot{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial y}$
- (Pour un écoulement plan parallèle) on appelle **Loi rhéologique** la loi reliant τ_{xy} à $\dot{\gamma}$.
- On appelle **fluide Newtonien** un fluide dont la loi rhéologique est linéaire : $\tau_{xy} = \mu\dot{\gamma}$.
 μ est la **viscosité dynamique** (en $Pa \cdot s$).

Remarque importante : tout comme la pression, la contrainte visqueuse s'exerce à la fois sur une paroi solide ou sur une surface (fictive) séparant le fluide en deux sous-domaines.

Cas des gaz : Expériences numériques

Pour comprendre l'origine du phénomène de viscosité, Effectuons deux "expériences numériques" à l'aide du programme de cinétique des gaz KINETICS.M.

Expérience 1 : Condition initiale = deux "strates" de particules de vitesse (moyenne) différente (sélectionner le cas "4" dans le programme) .

Au niveau **microscopique** on observe des échanges de quantité de mouvement à travers la frontière (virtuelle) entre les deux "strates". En conséquence la vitesse "moyenne" dans chaque strate évolue, la strate "rapide" ralentit, la strate "lente" accélère.

Au niveau **macroscopique**, ces échanges de quantité de mouvement se modélisent par une force surfacique exercée entre chaque strate.

Expérience 2 : Condition initiale = un gaz "en mouvement uniforme" (vitesse moyenne des particules non nulle, identique dans toutes les strates), entre deux parois "au repos". (sélectionner le cas "7" dans le programme) .

Au niveau **microscopique** on observe que les particules impactant la paroi rebondissent dans des directions aléatoires (contrairement à ce qu'on s'attendrait à avoir dans le cas de rebonds "parfaits" où la vitesse perpendiculaire à la paroi serait conservée). Il y a donc un **transfert de quantité de mouvement** entre le gaz et la paroi.

Explication : la paroi est elle-même constituée de particules en mouvement d'agitation thermique... qui communiquent aux particules de gaz cette agitation.

Au niveau **macroscopique**, ces échanges de quantité de mouvement se modélisent par une force surfacique exercée entre le gaz et la paroi solide.

Cas des gaz : formalisation

Pour les gaz, on observe que la force surfacique représentant ces échanges de quantité de mouvement (entre strate ou à une paroi solide) suit une loi **linéaire** en fonction du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$.

Les gaz parfaits sont donc des **fluides Newtoniens** : $\tau_{xy} = \mu \dot{\gamma}$.

On peut montrer par un argument de cinétique des gaz que :

$$\mu \approx \frac{nv_q}{2} m_p \ell \approx \rho \ell v_q / 2 \quad \left(\approx \frac{\rho \ell}{2} \sqrt{\frac{T}{3r}} \right)$$

où ℓ est le libre parcours moyen, v_q la vitesse quadratique moyenne, n la densité volumique de particules et m_p leur masse.

(cf. Guyon, Hulin, Petit ; ou document

http://lphe.epfl.ch/~mtran/phy_gen_B/Cours/Phys_214.pdf p.19)

Ordre de grandeur : pour l'air à température et pression ambiante

$$\mu \approx 10^{-5} \text{ Pa.s} ; \nu \approx 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}.$$

Cas des liquides simples

Liquides "simples" = constitués de "petites molécules" (eau, huiles, métaux liquides, etc...)

On observe également une loi rhéologique linéaire : $\tau_{xy} = \mu \dot{\gamma}$ (loi Newtonienne).

Explication physique : pour mettre en mouvement les strates de fluide les unes par rapport aux autres, il faut briser des liaisons pour en recréer d'autres.

Ordre de grandeur pour l'eau à $20^{\circ}C$: $\mu \approx 10^{-3} Pa.s$, $\nu \approx 10^{-6} m^2/s$.

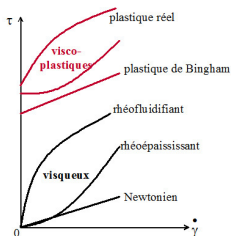
Effet de la température : C'est d'autant plus facile de "briser les liaisons" que l'agitation thermique est importante.

=> Dans un liquide (simple), contrairement à un gaz, la viscosité diminue avec la température !

(Loi de Suttner pour l'eau : $\mu = \mu_0 e^{-\alpha(T-T_0)}$).

Cas des liquides "complexes"

Pour des liquides "complexes" (mélanges, suspensions, contenant des "grosses" molécules ou particules) on observe des comportements divers :



- Fluides rhéo-épaississants (shear-thickening) :** la viscosité effective augmente avec le cisaillement.
 Exemples : maïzena, sable mouillé, ... (Suspensions denses de particules "dures")
 (Explication physique : à faible cisaillement les particules glissent les unes sur les autres, à fort cisaillement elles se "bloquent")
- Fluides rhéo-fluidifiants (shear-thinning) :** la viscosité effective diminue avec le cisaillement.
 Exemples : shampoing, lessive, sang, jus de fruits concentrés,... (Suspensions de polymères ou de particules "molles")
 (Explication physique : à fort cisaillement les chaînes de polymères se déroulent et "s'alignent" avec le cisaillement, offrant ainsi moins de résistance à la déformation.)
- Fluides à seuil (ou solides visco-plastiques) :** il faut exercer une contrainte minimale τ_c pour mettre le fluide en mouvement.
 Exemples : mayonnaise, ketchup, dentifrice, cf. TD 4.1.

Compléments : lois rhéologiques instationnaires

Pour certains fluides on observe de plus que la loi rhéologique ne dépend pas seulement des valeurs instantanées de τ_{xy} et $\dot{\gamma}$ mais aussi de la manière dont les contraintes et les déformations varient au cours du temps :

- Comportement thixotrope

La viscosité "effective" diminue avec la durée d'imposition de la contrainte.

Exemples : Terre agricole, boue, polymères, ...

- Comportement viscoélastique

Voir exercice d'approfondissement 3.X

Contraintes exercées "rapidement" $\Rightarrow$ Comportement de solide élastique

Contraintes exercées "lentement" $\Rightarrow$ Comportement de fluide visqueux.

Exemples : Maïzena, pâte silicone, ...

Écoulements parallèles plans

Considérons l'écoulement parallèle stationnaire d'un fluide Newtonien, décrit par son champ de vitesse

$$\vec{u} = u(y)\vec{e}_x$$

Le bilan des forces sur un volume élémentaire projeté dans les directions x et y conduit à :
[\[Démonstration au tableau\]](#)

$$\rho g_x - \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \quad \text{soit} \quad \rho g_x - \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right] + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\rho g_y - \left[\frac{\partial p}{\partial y} \right] = 0$$

Remarques :

1. Les équations peuvent également s'écrire $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial p^*}{\partial x}$; $\frac{\partial p^*}{\partial y} = 0$.
 où $p^* = p - \rho \vec{g} \cdot \vec{x}$ est la "pression étoilée" (cf. chapitres 4, 8-9).
 et $\frac{\partial p^*}{\partial x} \equiv -G$ est le gradient de pression effectif (cf. exo 3.0).
2. On montre que de manière générale $p(x, y)$ est une fonction affine :
 $p(x, y) = p(0, 0) + \rho g_y y + Ax$; où la constante A est déterminée par les conditions aux limites
 (autre écriture : $p^*(x) = p^*(0) + Ax$)
3. Si l'on tient compte des contraintes visqueuses τ_{yx} exercées sur les facettes d'orientation x , alors l'équilibre des moments sur le volume élémentaire conduit à :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Solutions classiques stationnaires (rappels L2)

Equation du film parallèle stationnaire :

$$\rho g_x - \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right] + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Ce problème admet des solutions exactes à connaître (cf. Formulaire section F), parmi lesquelles :

- **L'écoulement de Poiseuille plan** dans un canal de largeur h ($y \in [0, h]$) et de longueur L .

Exercice de cours :

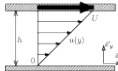
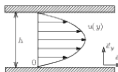
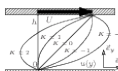
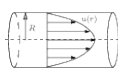
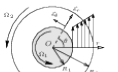
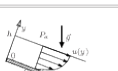
Montrer que l'écoulement $u(y)$ et le débit de masse Q_l à travers le canal (en $kg/s/m$) valent :

$$u(y) = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p^*}{\partial x} y(h-y) = u_{max} \times \frac{4y(h-y)}{h^2} \text{ avec } u_{max} = -\frac{h^2}{8\mu} \frac{\partial p^*}{\partial x}$$

$$Q_l = -\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p^*}{\partial x} = \frac{\rho h^3}{12\nu} \left[\frac{p_0 - p_L}{L} - \rho g_x \right] = \frac{2\rho h}{3} u_{max}.$$

- Les écoulements de Couette et Couette-Poiseuille entre deux plaques en mouvement différentiel.
- L'écoulement de film tombant.

Solutions classiques stationnaires (rappels L2)

(Quelques) solutions exactes des équations de Navier-Stokes			
Schéma	Hypothèses	Solution	Nom de l'écoulement
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$	$\vec{u} = u(y)\vec{e}_x$ avec $u(y) = \frac{Uy}{h}$ $p = C^{ste}$	Couette plan sans gradient de pression ($\partial p / \partial x = 0$)
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$	$\frac{dp}{dx} = C^{ste}$ et $\vec{u} = u(y)\vec{e}_x$ avec $u(y) = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(h-y)$	Poiseuille plan
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$	$\frac{dp}{dx} = C^{ste}$ et $\vec{u} = u(y)\vec{e}_x$ avec $u(y) = U \left[\frac{y}{h} - K \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h} \right) \right]$ où $K = \frac{h^2}{2\mu U} \frac{dp}{dx}$	Couette plan avec gradient de pression ($\partial p / \partial x \neq 0$) = "Couette-Poiseuille"
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} = \vec{0}$	$\frac{dp}{dx} = C^{ste}$ et $\vec{u} = u(r)\vec{e}_x$ avec $u(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (R^2 - r^2)$	Poiseuille cylindrique
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} = \vec{0}$ $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$	$\vec{u} = v(r)\vec{e}_\theta$ avec $v(r) = Ar + \frac{B}{r}$ où $A = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$ et $B = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$	Couette cylindrique = "Couette-Taylor"
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$	$\vec{u} = u(y)\vec{e}_x$ avec $u(y) = \frac{g \sin \alpha}{2\nu} y(2h-y)$ $p(y) = \rho g(h-y) \cos \alpha + P_a$	Film tombant

Écoulements parallèles cylindriques

Considérons maintenant l'écoulement parallèle décrit en coordonnées cylindriques (r, θ, z) par :

$$\vec{u} = u(r)\vec{e}_z$$

Dans ce cas il est pertinent d'introduire la contrainte visqueuse τ_{zr} est la contrainte visqueuse exercée **dans la direction z** sur une facette d'orientation normale **r** (cad une portion de surface cylindrique), par la région r^+ (c.a.d. l'extérieur de cette surface cylindrique) sur la région r^- (c.a.d l'intérieur de cette même surface).

Pour un fluide Newtonien cette contrainte est de nouveau proportionnelle au cisaillement correspondant :

$$\tau_{zr} = \mu \frac{\partial u}{\partial r}$$

- Résolution dans le **cas d'un fluide Newtonien** : (Exercice complémentaire 3.0)

L'analogie de l'équation écrite précédemment pour les écoulement plans parallèles est :

$$\rho g_z - \left[\frac{\partial p}{\partial z} \right] + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0$$

Et la solution dans un tuyau de rayon R est l'écoulement de Poiseuille cylindrique

$$u(r) = \frac{1}{4\mu} \left[\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} \right] (R^2 - r^2)$$

- **Cas d'un fluide à seuil**
(TD, exercice 3.1).