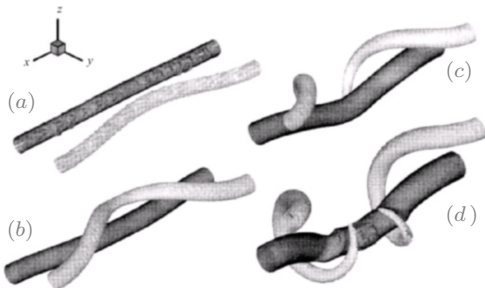


Mécanique des fluides

David FABRE

IMFT / UPS

Département de Mécanique



*Interaction entre deux
tourbillons contrarotatifs*

© P. Brancher, IMFT

4. Equations de Navier-Stokes ; Ecoulements parallèles instationnaires

Sommaire

Objectifs du chapitre :

- Etablir les équations du mouvement pour un fluide
 - ▶ **Incompressible** ($\rho = Cte$),
c.a.d. en pratique liquide ou gaz à faible vitesse ($Ma < 0.3$).
 - ▶ **Newtonien**

Dans le cas général d'un écoulement tridimensionnel avec pour champ de vitesse $\vec{u}(\vec{x}, t)$ et champ de pression $p(\vec{x}, t)$.

NB. On ré-établira ces équations au chapitre 8 avec une autre méthode, dans le cas plus général d'un gaz compressible

- Discuter les propriétés des écoulements instationnaires visqueux

Questions de cours sur le chapitre 4

Questions de cours :

1. Ecrire l'équation de continuité dans un fluide incompressible et expliquer avec les mains son interprétation.
2. Démontrez par la méthode de votre choix l'équation de Navier-Stokes.
3. Discuter les conditions limites vérifiées par un écoulement de fluide visqueux sur une paroi solide puis sur une surface libre.
4. Qu'est-ce que la "pression étoilée" p^* , quelle est son interprétation physique, et quelle est son utilité ?

Exercices de cours :

1. Par analyse dimensionnelle du premier problème de Stokes, montrez que la force de frottement suit une loi de la forme $F_x(t) \approx \rho S U \sqrt{\nu/t}$; puis que l'épaisseur de la couche fluide mise en mouvement suit une loi d'évolution de la forme $\delta(t) \approx \sqrt{\nu t}$.
2. Par analyse dimensionnelle du premier problème de Stokes, montrez que la force de frottement suit une loi de la forme $F_x(t) \approx \rho S U \sqrt{\nu/t}$; puis que l'épaisseur de la couche fluide mise en mouvement suit une loi d'évolution de la forme $\delta(t) \approx \sqrt{\nu t}$.
3. Ecoulements pulsés en conduite ; résolution des cas limites $St \ll 1$ et $St \gg 1$.

Sommaire

- Equations du mouvement d'un fluide
 - Equation "de continuité"
 - Accélération d'une particule fluide
 - Tenseur des contraintes visqueuse
 - Loi rhéologique pour un fluide Newtonien
 - Equation de Navier-Stokes
 - "Pression étoilée"
- Ecoulements plans parallèles instationnaires
 - Premier problème de Stokes
 - Second problème de Stokes
 - Ecoulement pulsé en conduite

Equation de continuité

Dans un fluide incompressible, l'équation de continuité, traduisant la conservation de la masse, s'écrit :

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

Cette relation se démontre à partir d'un bilan de masse sur un volume élémentaire (cf. MMC et S6).

Explication "avec les mains" pour un écoulement 2D :

$$\nabla \cdot \vec{u} = \underbrace{\frac{\partial u_x}{\partial x}}_{\text{taux d'étirement/compression dans la direction } x} + \underbrace{\frac{\partial u_y}{\partial y}}_{\text{taux d'étirement/compression dans la direction } y} = 0$$

Cette relation traduit donc la conservation du volume du fluide.

Remarque : l'hypothèse "fluide incompressible" est justifiée pour les liquides. On admettra que cette hypothèse est également valable dans le cas d'un écoulement de gaz subsonique $M < 0.3$ (Démonstration : chapitre 8).

Equation de Navier-Stokes (I)

Principe de la démonstration

On veut établir les équations du mouvement pour un écoulement décrit par son champ de vitesse $\vec{u}(\vec{x}, t)$ et son champ de pression $p(\vec{x}, t)$.

Le fluide est supposé

- Incompressible de masse volumique uniforme ρ
- Newtonien, de viscosité dynamique μ .

Principe : Bilan des forces sur un volume élémentaire de dimensions $\delta V = dxdydz$.

$$\underbrace{\rho dxdydz}_{\text{Masse}} \times \underbrace{\vec{a}}_{\text{accélération}} = \underbrace{\sum d\vec{f}_{ext \rightarrow \delta V}}_{\text{Somme des forces}}$$

Difficultés :

- Expression de l'accélération dans le cas général.
- Expression des contraintes visqueuses.

Remarque : on verra une seconde démonstration au semestre 7 à partir d'un bilan intégral des forces sur un volume quelconque

Accélération d'une particule fluide

Difficulté I :

Il faut exprimer l'accélération d'une particule fluide en mouvement le long de sa trajectoire en fonction de la position $\vec{x}$ (variable **lagrangienne**).

On montre que celle-ci s'écrit :

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}}_{\text{accélération temporelle}} + \underbrace{\vec{\text{grad}}(\vec{u}) \cdot \vec{u}}_{\text{accélération convective}}$$

La démonstration de cette formule est faite en cours de MMC et sera revue au chapitre 7.

Contentons-nous ici d'expliquer la signification de l'accélération convective via deux exemples :

(i) Ecoulement hyperbolique (MMC2, TD2)

Considérons un écoulement bidimensionnel donné par $\vec{u} = \begin{cases} kx \\ -ky \end{cases}$

Alors l'accélération vaut

$$\vec{a} = \begin{cases} k^2 x \\ k^2 y \end{cases}$$

(ii) Ecoulement tourbillonnaire

Considérons un écoulement bidimensionnel donné en coordonnées cylindriques par $\vec{u} = u_\theta(r)\vec{e}_\theta$.

Alors l'accélération vaut

$$\vec{a} = -\frac{u_\theta(r)^2}{r}\vec{e}_r.$$

On reconnaît l'accélération centripète d'une particule fluide décrivant une trajectoire circulaire.

Remarque : Dans la suite du module "Fluides 1", l'accélération convective sera toujours négligée ; il est par contre au programme de **savoir justifier sous quelles conditions ce terme est négligeable** (cf. chapitre 5).

Tenseur des contraintes visqueuses

Difficulté II : Il faut généraliser la loi rhéologique, introduite au chapitre 3 pour les écoulements parallèles, au cas tridimensionnel.

La notion de contrainte visqueuse (τ_{xy} dans le chapitre 3) se généralise en introduisant le **tenseur des contraintes visqueuses** :

$$\vec{\vec{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

Où :

τ_{xx} est la contrainte visqueuse exercée **dans la direction x** sur une facette d'orientation normale x , par le demi-espace x^+ sur le demi-espace x^- ,

τ_{xy} est la contrainte visqueuse exercée **dans la direction x** sur une facette d'orientation normale y , par le demi-espace y^+ sur le demi-espace y^- ,

(...)

Ce tenseur permet d'exprimer la force élémentaire $d\vec{f}_{1 \rightarrow 2}$ (exercée par un milieu (1) sur un milieu (2) sur une facette élémentaire dS d'orientation normale $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$) :

$$d\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = p\vec{n}_{1 \rightarrow 2}dS + \vec{\tau}_{1 \rightarrow 2}dS \quad \text{avec} \quad \vec{\tau}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{\vec{\tau}} \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

Ce qui s'écrit également

$$d\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = \vec{\vec{\sigma}} \cdot \vec{n}_{2 \rightarrow 1}dS \quad \text{où} \quad \vec{\vec{\sigma}} = -p\vec{1} + \vec{\vec{\tau}} \quad \text{est le tenseur des contraintes.}$$

(Convention MMC : force reçue par le domaine (2), normale sortante par rapport au domaine (2)).

Loi rhéologique pour un fluide Newtonien

La loi rhéologique d'un fluide Newtonien, vue sous la forme $\tau_{xy} = \mu \partial u / \partial y$ dans le chapitre précédent, se généralise alors en :

$$\vec{\tau} = \mu \left(\vec{g} \text{rad } \vec{u} + {}^t \vec{g} \text{rad } \vec{u} \right)$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$\vec{\tau} = 2\mu \vec{D}$$

où $\vec{D} = \frac{1}{2} \left(\vec{g} \text{rad } \vec{u} + {}^t \vec{g} \text{rad } \vec{u} \right)$ est le tenseur des taux de déformations.

Remarques :

- Le tenseur $\vec{\tau}$ est **symétrique** ; c'est une généralisation de la propriété $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ vue au chapitre précédent (et qui se démontre par un équilibre des moments exercés sur un volume élémentaire, CF MMC1).
- Dans le cas d'un gaz dans des régimes d'écoulement où les effets de viscosité et de compressibilité sont tous deux dominants (cas hors programme), On utilise le modèle du **fluide Stokesien** :

$$\vec{\tau} = 2\mu \vec{D}' ; \quad \text{où} \quad \vec{D}' = \vec{D} - \frac{\text{div}(\vec{u})}{3} \vec{1} \text{ est le déviateur du tenseur } \vec{D}.$$

- Pour les liquides non newtoniens, l'expression mathématique de la loi reliant $\vec{\tau}$ et $\vec{D}$ est particulièrement complexe... (option M1)

Equation de Navier-Stokes (II)

Bilan :

Les équations gouvernant le mouvement d'un fluide incompressible Newtonien s'écrivent donc :

(Démonstration au tableau)

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\text{grad}}(\vec{u}) \cdot \vec{u} \right] = -\nabla p + \rho \vec{g} + \mu \Delta \vec{u}, \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0, \\ (Cond. Lim.) \end{array} \right.$$

Conditions limites

Aux équations précédemment écrites il convient d'ajouter des **Conditions limites** sur les frontières $\partial\Omega$ du domaine fluide :

- Sur une frontière solide fixe $\partial\Omega_w$:

$$\vec{u}(\vec{x} \in \partial\Omega_w) = \vec{0}$$

On parle de **condition d'adhérence** (ou de non-glissement) sur une paroi.

Justification (cf. chap 3) : les particules élémentaires impactant la paroi rebondissent dans des directions aléatoires.

- Généralisation : sur une frontière solide mobile à la vitesse $\vec{U}_w$: $\vec{u}(\vec{x} \in \partial\Omega_w) = \vec{U}_w$.
- Sur une surface libre $\partial\Omega_f$ séparant un liquide d'un gaz de densité négligeable et de pression uniforme P_{atm} :

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n} = -P_{atm} \vec{n} \quad (\vec{n} \text{ normale sortante par rapport au liquide})$$

Remarques :

- Si la surface libre est plane et l'écoulement sous la surface est parallèle, alors en notant n et t les directions normale et tangentielle, ces conditions conduisent à :

$$p = P_{atm}; \quad \tau_{tn} = 0.$$

- Pour une surface libre séparant le liquide d'un autre liquide de propriétés (ρ_g, μ_g) , les conditions limites deviennent : $[p - \tau_{nn}] = 0$, ; $[\tau_{tn}] = 0$ où la notation $[\mathcal{X}]$ désigne "saut de la quantité $\mathcal{X}$ ".
- Si l'interface est courbée, il faut prendre en compte l'effet de tension de surface. Le saut de contraintes normales devient : $[p - \tau_{nn}] = \gamma K$ où γ est la tension de surface et K la courbure.

Simplification concernant le terme de gravité

Pour un fluide incompressible, il peut être pratique de décomposer la pression en deux parties :

$$p = p_s + p^*$$

- p_s est la "pression hydrostatique" dont on a montré au chapitre 2 qu'elle a pour expression $p_s = p_0 + \rho \vec{g} \cdot \vec{x}$, où p_0 est une valeur de référence "à l'altitude zéro".
(Dans le cas le plus courant où $\vec{g}$ est orientée selon $(-z)$, l'expression est $p_s = p_0 - \rho g z$).
- p^* appelée (dans ce cours) "pression étoilée" et la composante de la pression spécifiquement associée à l'écoulement (elle vaut zéro dans un écoulement au repos, et aussi dans les zones de l'écoulement où la vitesse est uniforme).

=> L'eq. de NS se simplifie alors en $\rho_0 \frac{d\vec{u}}{dt} = -\rho_0 \vec{g} + \nabla p^* + \mu \Delta \vec{u}$

qui est l'équation gouvernant le mouvement d'un fluide "non pesant" ($\vec{g} = \vec{0}$) !

Conséquences :

- Pour calculer l'écoulement $(\vec{u}, p)$ autour d'un objet dans un fluide "pesant" ($\vec{g} \neq \vec{0}$), on peut commencer par s'intéresser au problème "non pesant" équivalent.
Si on connaît la solution $(\vec{u}, p^*)$ de ce problème "non pesant", alors le problème pesant est également résolu car le champ de vitesse $\vec{u}$ est le même, et la pression p se déduit de p^* en rajoutant le terme hydrostatique !
- Si l'on souhaite également évaluer la force exercée sur cet objet (noté Ω , de normale sortante $\vec{n}$), alors celle-ci se décompose en deux termes :

$$\vec{F}_{\mathcal{F} \rightarrow \Omega} = \oint_S (-p \vec{n} + \vec{\tau} \cdot \vec{n}) dS = \underbrace{\oint_S (-p^* \vec{n} + \vec{\tau} \cdot \vec{n}) dS}_{\text{Force hydrodynamique}} - \underbrace{\oint_S (\rho_0 \vec{g} \cdot \vec{x}) \vec{n} dS}_{\text{Poussée d'Archimède}}$$

Equations pour un écoulement plan parallèle instationnaire

Reprenons maintenant l'étude des écoulement plans parallèles dans le cas instationnaire.
On part donc d'un écoulement décrit par :

$$\vec{u} = u(y, t)\vec{e}_x$$

En injectant dans l'équation de Navier-Stokes et en simplifiant, on arrive à l'équation suivante gouvernant l'évolution de l'écoulement :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \rho g_x - \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right] + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Qui généralise l'équation obtenue au chapitre 3 pour les écoulements parallèles stationnaires.

Remarques :

- Le terme d'accélération convective $\vec{g} \cdot \nabla(\vec{u}) \cdot \vec{u}$ est nul dans ce type d'écoulement par raison géométrique !
- On peut justifier que le gradient de pression est uniforme (indépendant de x,y) mais peut éventuellement dépendre du temps : $\left[\frac{\partial p}{\partial x} \right] = F(t)$.
- Autre forme de l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g_x - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right] + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Remarques Complémentaires

1. Cette équation peut se mettre sous la forme d'une équation de production/diffusion de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \underbrace{g_x - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right]}_{\text{Production}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\text{Diffusion}}$$

2. Il existe une analogie entre la diffusion de quantité de mouvement (viscosité) et la diffusion de la chaleur (conduction thermique). en effet les équations ont la même forme !

Equation de la conduction thermique 1D ($\theta = \theta(x, t)$) (cf. cours de transferts thermiques) :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \underbrace{\frac{\sigma}{\rho c_p}}_{\text{Production}} + \underbrace{\kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}}_{\text{Diffusion}}$$

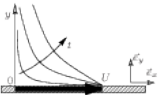
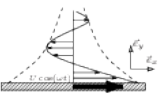
$\kappa = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ Diffusivité thermique, même dimension physique que ν ! ($[\kappa] = L^2 T^{-1}$).

3. Il existe de même une analogie avec la diffusion de la concentration C_i d'une espèce i dans un mélange :

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2}$$

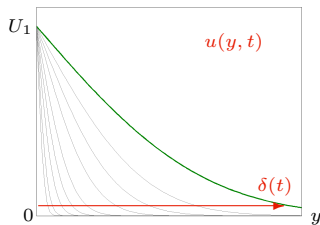
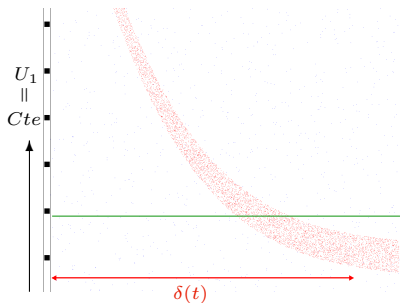
D est la diffusivité de l'espèce i , également même dimension physique que ν ! ($[D] = L^2 T^{-1}$).

Problèmes instationnaires classiques

	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$ $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$	$\vec{u} = u(y, t) \vec{e}_x$ avec $u(y, t) = U \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right) \right]$ $\tau_p = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right _{y=0} = -\rho U \sqrt{\frac{\nu}{\pi t}}$	Premier problème de Stokes
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$ $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$	$\vec{u} = u(y, t) \vec{e}_x$ $u(y, t) = U e^{-y/\delta} \cos(\omega t - \frac{y}{\delta}); \quad \delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$ $\tau_p = -\mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right _{y=0} = -\frac{\mu U \sqrt{2}}{\delta} \cos(\omega t + \pi/4)$	Second problème de Stokes

1er Problème de Stokes (1)

Problème : Un fluide (homogène, Newtonien) occupe le demi-espace $y > 0$, bordé par une surface S "grande". A $t = 0$, le fluide est au repos ; pour $t > 0$ la paroi ($y = 0$) est mise en mouvement à la vitesse constante U_1 .



mesure du profil de
vitesse verticale $u(y, t)$

(Voir aussi illustrations avec le programme kinetics.m ; choix 3).

Problème mathématique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cond. Lim.} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \\ \text{Cond. Init.} \quad u(0, t) = U_1, \quad u(\infty, t) = 0; \\ \quad \quad \quad u(y, 0) = 0. \end{array} \right.$$

Premier problème de Stokes (2)

Intéressons nous à la **Force de frottement** F_x exercée sur la paroi.

⇒ Présentons ici une résolution basée sur l'**analyse dimensionnelle**.

Une première recherche des paramètres "pertinents et indépendants" conduit à postuler une relation fonctionnelle de la forme :

$$F_x = \mathcal{F}(\rho, S, t, \nu, U_1)$$

Simplifications :

- F_x est proportionnel à S (argument géométrique).
- F_x est proportionnel à U_1 (argument mathématique du à l'analyse de la structure des équations; en effet le problème est linéaire).

On va donc repartir d'une relation fonctionnelle de la forme : $\frac{F_x}{SU_1} = \mathcal{F}(\rho, t, \nu)$

$$\text{Sous forme adimensionnelle : } \frac{F_x/SU_1}{M^* L^{*-2} T^{*-1}} = \overline{\mathcal{F}} \left(\frac{\rho}{M^* L^{*-3}}, \frac{t}{T^*}, \frac{\nu}{L^{*2} T^{*-1}} \right)$$

Recherche des dimensions intrinsèques :

$$T^* = t, \quad L^* = (\nu t)^{1/2}, \quad M^* = \rho L^{*3}$$

$$\text{On arrive donc à : } \frac{F_x t^{1/2}}{\rho S U_1 \nu^{1/2}} = \overline{\mathcal{F}}(1, 1, 1) = Cte.$$

$$\text{Soit : } F_x = \rho S U_1 \sqrt{\frac{\nu}{t}} \times Cte.$$

Premier problème de Stokes (3)

Prédiction de l'analyse dimensionnelle :

$$F_x = \rho S U_1 \sqrt{\frac{\nu}{t}} \times Cte$$

Remarques :

- La solution exacte (cf. TD 4.0) s'écrit $F_x = \rho S U_1 \sqrt{\frac{\nu}{\pi t}}$ qui est bien de la forme attendue.
- L'échelle de longueur $L^* = (\nu t)^{1/2}$ apparaissant dans l'analyse dimensionnelle est la seule échelle de longueur du problème (en supposant la surface S de la plaque "grande"). Cette échelle de longueur sera notée δ et on l'appellera **échelle caractéristique de diffusion visqueuse**.

$$\delta = \sqrt{\nu t}$$

C'est notamment l'épaisseur de la couche de fluide mise en mouvement.

- Plutôt que de rechercher une échelle caractéristique de longueur δ correspondant à l'épaisseur de la couche de fluide mise en mouvement par diffusion visqueuse à l'instant t , on peut se poser la question inverse :

Si l'on se place à une distance L de la paroi, quelle est l'échelle caractéristique de temps au bout de laquelle le fluide se met en mouvement ?

La relation $\delta = \sqrt{\nu t}$ devient alors :

$$\tau_\nu = \frac{L^2}{\nu}$$

La quantité τ_ν est appelée le temps caractéristique de diffusion visqueuse.

Second problème de Stokes

Problème : Ecoulement instationnaire établi engendré par une paroi oscillante
 $U(y=0) = U \cos(\omega t)$.

- Etude par analyse dimensionnelle :
 Estimons la force de frottement maximale $F_{x,max}$ exercée sur la paroi au cours d'un cycle :

$$F_{x,max} = \mathcal{F}(S, U, \rho, \omega, \nu) \longrightarrow (\text{simplifications}) \longrightarrow \frac{F_{x,max}}{SU} = \mathcal{F}(\rho, \omega, \nu)$$

$$\longrightarrow \tau_{p,max} = \frac{F_{x,max}}{S} = \rho U \sqrt{\nu \omega} \times C_{te}$$

- Solution exacte :** TD, exercice 4.1

$$u(y, t) = U e^{-y/\delta} \cos(\omega t - y/\delta) \quad \text{avec } \delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$$

$$\tau_p(t) = -\frac{\mu U}{\sqrt{2}\delta} \cos(\omega t + \pi/4)$$

Ecoulement pulsé en conduite (TP numérique)

Etudions l'écoulement d'un fluide soumis à un gradient de pression périodique, dans un canal horizontal ($g_x = 0$) d'épaisseur h :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = K \cos(\omega t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{K}{\rho} \cos(\omega t) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Cherchons à simplifier le problème par analyse dimensionnelle des équations :

Posons U = échelle caractéristique (ou jauge) de vitesse.

L'échelle de temps est $T = \omega^{-1}$, et l'échelle de longueur est (a priori) h .

	$\frac{\partial u}{\partial t}$	=	$-\frac{K}{\rho} \cos(\omega t)$	+	$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
(Désignation :)	$\mathcal{I}$		$\mathcal{P}$		$\mathcal{V}$
(Ordre de grandeur :)	$\frac{U}{T}$		$\frac{K}{\rho}$		$\nu \frac{U}{h^2}$

Le terme $\mathcal{P}$ est nécessairement présent à l'ordre dominant. Comparons les termes $\mathcal{V}$ et $\mathcal{I}$:

$$\frac{[\mathcal{I}]}{[\mathcal{V}]} = \frac{h^2 \omega}{\nu} = St$$

Ceci définit le **Nombre de Stokes** de l'écoulement.

Ecoulement pulsé en conduite (TP Numérique) (Suite)

- Si $St \ll 1$ alors $[I] \ll [V]$, à l'ordre dominant on peut négliger $[I]$ et ne garder que $[V]$ et $[P]$.

$$0 = -\frac{K}{\rho} \cos(\omega t) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\Rightarrow \text{Solution : } u(y, t) \approx -\frac{Kh^2}{2\mu} \cos(\omega t) (1 - y^2/h^2)$$

"Ecoulement de Poiseuille quasi-statique".

- Si $St \gg 1$ alors $[V] \gg [I]$, à l'ordre dominant on peut négliger $[V]$ et ne garder que $[I]$ et $[P]$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{K}{\rho} \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \text{Solution : } u(y, t) \approx -\frac{K}{\rho\omega} \sin \omega t$$

"Ecoulement uniforme pulsé"

Remarque : cette solution ne vérifie pas la condition limite d'adhérence... en réalité il se forme une "couche limite de Stokes" d'épaisseur δ (cf. problème précédent).

- Si $St = \mathcal{O}(1)$, pas de simplification possible, il faut garder $[V]$ et $[I]$.

Le problème a une solution mathématique "moins simple", qu'on peut obtenir à l'aide de la méthode de la variable complexe

(cf. TD 4.2 ; visualisation avec le programme `pulse.py`)

On peut aussi résoudre le problème numériquement par la méthode des différences finies (cf. TP Numérique).

Questions de cours sur le chapitre 4

Questions de cours :

1. Ecrire l'équation de continuité dans un fluide incompressible et expliquer avec les mains son interprétation.
2. Démontrez par la méthode de votre choix l'équation de Navier-Stokes.
3. Discuter les conditions limites vérifiées par un écoulement de fluide visqueux sur une paroi solide puis sur une surface libre.
4. Qu'est-ce que la "pression étoilée" p^* , quelle est son interprétation physique, et quelle est son utilité ?

Exercices de cours :

1. Par analyse dimensionnelle du premier problème de Stokes, montrez que la force de frottement suit une loi de la forme $F_x(t) \approx \rho S U \sqrt{\nu/t}$; puis que l'épaisseur de la couche fluide mise en mouvement suit une loi d'évolution de la forme $\delta(t) \approx \sqrt{\nu t}$.
2. Par analyse dimensionnelle du premier problème de Stokes, montrez que la force de frottement suit une loi de la forme $F_x(t) \approx \rho S U \sqrt{\nu/t}$; puis que l'épaisseur de la couche fluide mise en mouvement suit une loi d'évolution de la forme $\delta(t) \approx \sqrt{\nu t}$.
3. Ecoulements pulsés en conduite ; résolution des cas limites $St \ll 1$ et $St \gg 1$.