

Mécanique des fluides

David FABRE

IMFT / UPS
Département de Mécanique



Coulée de lave sur le volcan Kilauea (Hawaï)

5. Ecoulements visqueux non parallèles

Sommaire

Objectifs du chapitre :

Dans les chapitres précédents on a étudié en détail une classe d'écoulements dominés par la viscosité : les écoulements plans dits **parallèles**, c'est-à-dire de la forme

$$\vec{u} = u(y) \vec{e}_x \quad (\text{en géométrie cartésienne}).$$

ou

$$\vec{u} = u(r) \vec{e}_x \quad (\text{en géométrie cylindrique}).$$

Ceux-ci sont solutions d'une équation particulièrement simple car **linéaire** ; en effet le terme $(\vec{\text{grad}} \vec{u}) \cdot \vec{u}$ disparaît pour des raisons géométriques.

Cette propriété est vraie également pour les **écoulements circulaires** de la forme $\vec{u} = u_\theta(r) \vec{e}_\theta$ (cf. Exercice 3.3 et TP 2 "viscosimètre").

Dans ce chapitre on va s'intéresser à trois autres classes d'écoulements dominés par la viscosité et dans lesquelles les équations se simplifient pour permettre une résolution exacte ou approchée :

- Les écoulements de Stokes
- Les écoulements quasi-parallèles (ou écoulements rampants).
- Les couches limites.

Un autre objectif du chapitre est d'introduire et formaliser une démarche très utile en mécanique des fluides : l'analyse dimensionnelle des équations en vue de simplifier celles-ci.

Questions de cours sur le chapitre 5

Questions de cours :

1. Sous quelles hypothèses le régime d'écoulement de Stokes est-il justifié ? Comment les équations de Navier-Stokes se simplifient-elles dans ce cas ?
2. Quelles sont les principales propriétés des écoulements de Stokes ?
3. Sous quelles hypothèses le régime d' "écoulement de film mince" est-il justifié ? Comment les équations de Navier-Stokes se simplifient-elles dans ce cas ?
4. Estimez, par analogie avec le premier problème de Stokes, l'épaisseur caractéristique $\delta(x)$ d'une couche limite laminaire.

Exercices de cours :

1. Par analyse dimensionnelle, estimez la force de frottement sur une particule sphérique dans le régime de Stokes.
2. En déduire une estimation de la vitesse de chute libre d'une gouttelette d'eau.
3. Drainage d'un film sur une paroi verticale (exercice 5.4).

9. Écoulements visqueux non parallèles

- Analyse dimensionnelle et PMD
- Écoulements de Stokes
 - Analyse dimensionnelle de l'équation de Navier-Stokes
 - Propriétés des écoulements de Stokes
 - Écoulement autour d'une sphère
- Écoulements de films minces
 - Définition et méthode de résolution
 - Exemple
- Couches limites
 - Introduction
 - Couche limite de Blasius

Simplification d'une équation basée sur les ordres de grandeurs des termes la constituant

Considérons une équation impliquant plusieurs termes.

On peut, avant de la résoudre, chercher à la simplifier en estimant les **ordres de grandeurs** des différents termes.

Parmi les termes dont l'ordre de grandeur est **connu**, on pourra distinguer des **termes dominants** (dont l'ordre de grandeur est beaucoup plus grand que les autres) et des termes **sous-dominants**.

Alors :

- Les termes dominants doivent être gardés,
- Les termes sous-dominants peuvent être négligés (en première approximation),
- Les termes dont l'ordre de grandeur est inconnu doivent être gardés, et leur ordre de grandeur est fixé par celui du (ou des) termes dominants. (**Principe de moindre dégénérescence ; PMD**).

Quelques exemples :

1. $A + B = C$.

Une estimation des ordres de grandeur conduit à $[A] = \mathcal{O}(1000)$, $[B] = \mathcal{O}(1)$, $[C]$ est inconnu.

Alors la relation peut être simplifiée en $A = C$,

et l'ordre de grandeur de la quantité inconnue C est fixé par celui du terme dominant : $[C] = [A] = \mathcal{O}(1000)$.

2. $A + B = C + D$.

Une estimation des ordres de grandeur conduit à $[A] = \mathcal{O}(1000)$, $[B] = \mathcal{O}(1)$, $[C]$ et $[D]$ sont inconnus.

Alors la relation peut être simplifiée en $A = C + D$,

et l'ordre de grandeur des deux termes inconnus est fixé par le terme dominant : $[C] = [D] = [A]$.

(il peut arriver qu'en réalité $[D] \ll [C]$ mais on est sûr de ne pas faire d'erreur en supposant $[C] = [D]$)

3. $A + B = C$. (A, B, C étant des quantités algébriques de signe inconnu).

Une estimation des ordres de grandeur conduit à $[A] = \mathcal{O}(1000)$, $[B] = \mathcal{O}(1000)$, $[C]$ est inconnu.

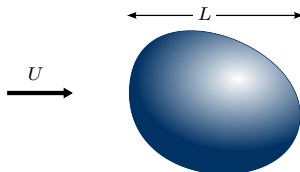
Pas de simplification possible, il faut garder l'équation sous la forme $A + B = C$.

et l'ordre de grandeur de la quantité inconnue C est fixé par celui du terme dominant : $[C] = [A] = \mathcal{O}(1000)$.

(il peut arriver que $B \approx -A$ de telle sorte qu'en réalité $[C] \ll [A]$, $[B]$ et la relation peut se simplifier en $A + B = 0$, mais on est sûr de ne pas faire d'erreur en gardant tous les termes...)

Analyse dimensionnelle de l'équation de Navier-Stokes

Considérons l'écoulement autour d'un obstacle de dimension L , avec une échelle de vitesse U .



Cherchons à estimer l'ordre de grandeur des termes constituant l'équation de Navier-Stokes pour un écoulement de vitesse incidente U autour d'un obstacle de taille caractéristique L .

Ordres de grandeurs :

$$|\vec{u}| = \mathcal{O}(U)$$

$$p^* = \mathcal{O}(P)$$

$$(x, y, z) = \mathcal{O}(L)$$

$$t = \mathcal{O}(T)$$

U : échelle caractéristique (ou jauge) de vitesse

P : .. jauge des variations de pression (étoilée)

L : échelle caractéristique de longueur

T : de temps

(supposé connu)

(inconnu)

(connu, fixée par la géométrie)

(connu, inconnu, ou non pertinent)¹

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{u}) \cdot \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p^* + \nu \Delta \vec{u}$$

(désignation :)

(Ordre de grandeur :)

$\mathcal{I}$

$$[\mathcal{I}] = \frac{U}{T}$$

$\mathcal{C}$

$$[\mathcal{C}] = \frac{U}{L} \times U$$

$\mathcal{P}$

$$[\mathcal{P}] = \frac{P}{\rho_0 L}$$

$\mathcal{V}$

$$[\mathcal{V}] = \nu \frac{U}{L^2}$$

1. T est connu si une échelle de temps est imposée par les conditions limites (paroi oscillante avec période T par exemple); inconnu si une évolution temporelle spontanée est observée; non pertinent si l'écoulement est stationnaire

Analyse dimensionnelle de l'équation de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\text{grad}}(\vec{u}) \cdot \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} p^* + \nu \Delta \vec{u}$$

(désignation :)

$$\mathcal{I} \quad [\mathcal{I}] = \frac{U}{T}$$

$$\mathcal{C} \quad [\mathcal{C}] = \frac{U}{L} \times U$$

$$\mathcal{P} \quad [\mathcal{P}] = \frac{P}{\rho_0 L}$$

$$\mathcal{V} \quad [\mathcal{V}] = \nu \frac{U}{L^2}$$

En comparant l'ordre de grandeur des termes on fait apparaître les nombres sans dimension suivants :

- $\frac{[\mathcal{C}]}{[\mathcal{V}]} = \frac{UL}{\nu} = Re$ **Nombre de Reynolds**
- $\frac{[\mathcal{I}]}{[\mathcal{V}]} = \frac{L^2}{\nu T} = St$ **Nombre de Stokes**

Sous les hypothèses $Re \ll 1$ et $St \ll 1$, le terme $\mathcal{V}$ est dominant et les termes $\mathcal{I}$ et $\mathcal{C}$ sont sous-dominants.

L'équation de Navier-Stokes se simplifie alors pour donner l'**Equation de Stokes** :

$$-\vec{\text{grad}} p^* + \mu \Delta \vec{u} = \vec{0}$$

Et le PMD permet de préciser l'ordre de grandeur P des fluctuations de pression :

$$[\mathcal{P}] = [\mathcal{V}], \quad \text{soit } P \sim \mu U / L$$

Validité du régime de Stokes

Les écoulements solutions de équations de Stokes sont appelés écoulements de Stokes.

L'hypothèse $Re = \frac{UL}{\nu} \ll 1$ peut correspondre à des écoulements :

- très **lents**
Ex. glacier : $U \sim 1$ m/jour $\sim 10^{-5}$ m/s ; manteau terrestre : $U \sim 1$ m/an $\sim 10^{-8}$ m/s
- de fluides très **visqueux**
Ex. polymères, pâtes, boues, lave : $\nu \sim 10^3$ à $10^6 \nu_{\text{eau}}$
- autour de corps très **petits** ou dans des géométries très **confinées**
Ex. bactéries, particules en suspension, milieux poreux : $L \sim 10^{-6}$ m à 10^{-3} m

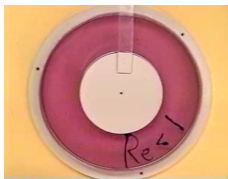
L'hypothèse $St = \frac{L^2}{\nu T} \ll 1$ signifie que

- Soit l'échelle de temps est grande devant le temps caractéristique de diffusion visqueuse τ_v .
En effet $St = \frac{\tau_v}{T}$ avec $\tau_v = \frac{L^2}{\nu}$,
donc $St \ll 1 \implies T \gg \tau_v \implies$ l'écoulement est "quasi-statique".
- Soit l'écoulement est stationnaire "par hypothèse" ou "par observation expérimentale".
Dans ce cas l'échelle de temps T n'est pas pertinente, ou peut être considérée comme infinie.
 $T = \infty \implies St = 0$

Propriétés

1. Le terme instationnaire $\partial \vec{u} / \partial t$ est négligé et le temps t n'apparaît plus explicitement dans les équations : soit le problème est directement stationnaire, soit le temps est un simple paramètre du problème intervenant seulement dans les conditions aux limites par exemple (approximation quasi-stationnaire).

→ Une conséquence est la **réversibilité temporelle** des écoulements de Stokes.

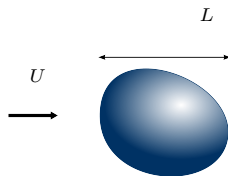


2. Le terme non linéaire $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$ de l'équation initiale de Navier–Stokes a disparu : l'équation de Stokes est une équation *linéaire*. → **additivité des solutions** à conditions limites différentes.
3. Une autre conséquence est qu'à conditions aux limites données, l'équation de Stokes admet une **solution unique**, contrairement au cas général à Re quelconque, où la non linéarité des équations autorise l'existence simultanée de plusieurs écoulements solutions.
4. Pour un écoulement bidimensionnel décrit par sa fonction de courant ψ , tel que $\vec{u} = \text{rot}(\psi \vec{e}_z)$ (cf. chap. 7), alors en prenant le rotationnel de l'équation de Stokes on peut ramener le problème à l'équation suivante, d'ordre 4 en espace : $\Delta^2 \psi = 0$.

Force exercée sur un objet en mouvement dans le régime de Stokes

Bien que plus simple en principe à résoudre que l'équation non linéaire de Navier–Stokes, l'équation de Stokes reste en pratique délicate à résoudre techniquement, même pour des géométries simples d'écoulements.

On peut cependant estimer par analyse dimensionnelle la force hydrodynamique² exercée sur un objet en mouvement par rapport à un fluide :



$$\vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{objet}} \equiv \oint_{\text{surface de l'objet}} \vec{\sigma} \cdot \vec{n}_{\text{objet} \rightarrow \text{fluide}} dS = \oint_{\text{surface de l'objet}} \left[-p^* \vec{1} + \vec{\tau} \right] \cdot \vec{n}_{\text{objet} \rightarrow \text{fluide}} dS$$

Ordres de grandeur des différents termes :

$$[p^*] = \frac{\mu U}{L} \quad (\text{dédit du PMD}); \quad [\vec{\tau}] = \mu [\vec{D}] = \mu \times \frac{U}{L}$$

Finalement on peut estimer l'ordre de grandeur de la force :

$$\left[\vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{objet}} \right] = \int_S [p'] dS + \int_S [\tau] dS = \int_S [\mu U / L] dS = [\mu U / L] \times L^2 = \mu U L$$

On constate que la force est proportionnelle à la vitesse. Ceci avait déjà été observé par Newton !

2. c'est à dire la force déduite de la pression motrice p^* , la force totale correspondant à celle-ci plus la poussée d'Archimède

Écoulement autour d'une sphère

Exemple de cas possédant une solution analytique : l'écoulement de Stokes autour d'une sphère solide.

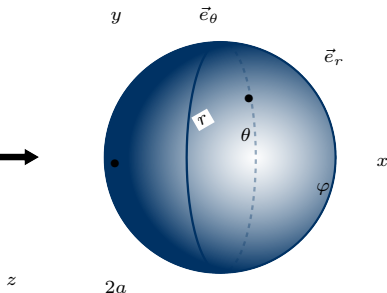
Cette solution est donnée par

$$u_r = U \cos \theta \left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3} \right)$$

$$u_\theta = -U \sin \theta \left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right)$$

$$p = p_\infty - \frac{3}{2} \mu U a \frac{\cos \theta}{r^2}$$

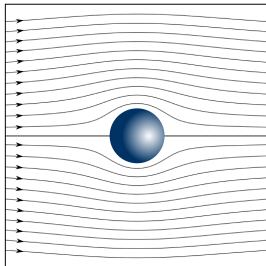
U, p_∞



Exercice : Vérifier que cet écoulement est effectivement solution de l'équation de Stokes en coordonnées sphériques (en utilisant le formulaire, section D.3).

Écoulement autour d'une sphère

Lignes de courant :



Exercice (5.X, correction sur internet)

A partir de la définition de l'écoulement donnée précédemment, calculer la force exercée par l'écoulement sur la sphère (**force de Stokes**), et montrez que celle-ci vaut :

$$\vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{sphère}} \equiv \oint_{\text{sphère}} -\vec{\sigma} \cdot \vec{n}_{\text{fluide} \rightarrow \text{sphère}} dS = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \vec{\sigma} \cdot \vec{e}_r a^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 6\pi\mu U a \vec{e}_x$$

Indication : en coordonnées sphériques les composantes nécessaires du tenseur des contraintes visqueuses sont

$$\tau_{rr} = 2\mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right); \quad \tau_{r\theta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)$$

Application : vitesse de chute d'un nuage

Exercice de cours :

Estimez la vitesse de chute d'un nuage, composé de gouttelettes d'eau (de masse volumique ρ_e), modélisées comme des particules solides de forme sphérique de rayon $a = 10\mu m$, chutant dans de l'air (de propriétés ρ, μ).

Considérons une gouttelette isolée.

Faisons l'hypothèse (à vérifier a posteriori) que l'écoulement autour de la gouttelette est en régime de Stokes et que la force de traînée est donnée par la formule précédente.

Alors les équations de la dynamique appliquée à la gouttelette s'écrivent :

$$m \frac{dU}{dt} = -6\pi\mu a U + (m - m_d)g \quad \text{avec } m = \frac{4\pi a^3 \rho_e}{3} \quad \text{et } m_d = \frac{4\pi a^3 \rho}{3}$$

(le terme en gris est la poussée d'Archimède qui sera négligé par la suite).

En considérant que la goutte est initialement au repos ($U(0) = 0$), la solution est

$$U(t) = U_e \left[1 - e^{-t/\tau_e} \right],$$

où $U_e = \frac{mg}{6\pi\mu a} = \frac{2}{9} \frac{a^2 \rho_e g}{\mu}$ est la **vitesse terminale**,

et $\tau_e = \frac{m}{6\pi\mu a} = \frac{2}{9} \frac{a^2 \rho_e}{\mu}$ le **temps caractéristique d'établissement** (ou de relaxation).

Application numérique : avec $a = 10\mu m$ on trouve :

$$U_e = 1.15 cm/s, \quad \tau_e = 1.2 ms.$$

Il reste à vérifier qu'on est bien dans le régime de Stokes comme supposé a priori.

Pour cela on évalue les nombres de Reynolds et de Stokes :

$$Re = \frac{U_e a}{\nu} = 0.0077 \ll 1, \quad St = \frac{a^2}{\nu \tau_e} = \frac{\tau_v}{\tau_e} = 0.0057 \ll 1.$$

Définition

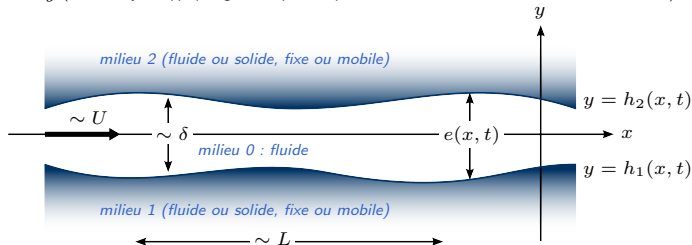
Considérons maintenant des situations dans lesquelles pour des raisons géométriques l'écoulement est très confiné dans une direction et peu confiné dans une autre direction.

On peut alors introduire deux échelles de longueur : L échelle de longueur axiale, δ échelle de longueur transverse.

On appelle alors **film mince** tout écoulement pour lequel

$$\delta \ll L \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\delta}{L} \ll 1$$

Dans la suite considérons le cas des écoulements 2D, s'effectuant dans la direction x et confinés dans la direction y (mais l'analyse s'applique également par exemple aux écoulements confinés dans la direction r , cf. TD)



Si U désigne une vitesse caractéristique de l'écoulement, alors on définit classiquement le nombre de Reynolds du film comme

$$Re = \frac{U\delta}{\nu}$$

où ν désigne la viscosité cinématique du fluide.

L'étude de la dynamique des films minces est l'objet de la **théorie de la lubrification**.

Equations de film mince

Hypothèses et équations de base :

Ecoulement plan, incompressible, de fluide homogène (ρ uniforme) et newtonien

$$\rightarrow \vec{u} = u(x, y, t) \vec{e}_x + v(x, y, t) \vec{e}_y$$

avec

$$\text{div } \vec{u} = 0$$

et

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \text{grad}) \vec{u} = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \vec{g}}_{-\frac{1}{\rho} \text{grad} p^*} + \nu \Delta \vec{u}$$

(On rappelle que $p^* = p - (p_0 + \rho \vec{g} \cdot \vec{x})$ est la "pression étoilée", définie comme la pression à laquelle on a retranché la pression hydrostatique.)

D'où les équations scalaires suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

Equations de film mince

On va reprendre la démarche de simplification des équations basée sur l'analyse dimensionnelle, déjà utilisée à la section précédente, mais maintenant en l'appliquant à la forme détaillée des équations, composante par composante.

Ordres de grandeurs :

$x = \mathcal{O}(L)$	L :	échelle caractéristique de longueur suivant x
$y = \mathcal{O}(\delta)$	δ :	 de longueur suivant y
$t = \mathcal{O}(T)$	T :	 de temps
$u = \mathcal{O}(U)$	U :	 de vitesse longitudinale
$v = \mathcal{O}(V)$	V :	 de vitesse transversale
$p^* = \mathcal{O}(P)$	P :	 de (variation de) pression (étoilée).

Les échelles L, δ, U, T sont imposées par les données du problème : géométrie et conditions limites (si le problème est stationnaire $T = \infty$)

Les échelles V et P , ordres de grandeur non connus de vitesse normale et des variations de pression motrice, sont à déterminer par examen des équations en appliquant le principe de moindre dégénérescence (PMD).³

Etude de l'Eq. (1) (continuité) :

$$\text{Ordre de grandeur : } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

$$\left[\frac{U}{L} \right] \quad \left[\frac{V}{\delta} \right]$$

⇒ Le PMD ne permet pas de simplifier l'équation mais de préciser l'ordre de grandeur de V :

$$V = \frac{\delta}{L} U = \varepsilon U.$$

3. En général l'échelle de vitesse U est fixée par les données du problème et l'échelle de pression P est inconnue, mais dans certains problèmes cela peut être l'inverse (cf. TD 5.1).

Equations de film mince (suite)

Etude de l' Eq. (2) (Navier-Stokes selon x) :

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\mathcal{I}} + \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x}}_{\mathcal{C}_x} + \underbrace{v \frac{\partial u}{\partial y}}_{\mathcal{C}_y} = -\underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x}}_{\mathcal{P}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\mathcal{V}_x} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\mathcal{V}_y} \quad (5)$$

$$\left[\frac{U}{T} \right] \quad \left[\frac{U^2}{L} \right] \quad \left[\frac{UV}{\delta} \right] \quad \left[\frac{P}{\rho L} \right] \quad \left[\frac{\nu U}{L^2} \right] \quad \left[\frac{\nu U}{\delta^2} \right]$$

Comme on cherche à caractériser des écoulements dominés par le frottement visqueux, le terme dominant est $\mathcal{V}_y$. Comparons son ordre de grandeur avec celui des autres termes :

- $[\mathcal{I}]/[\mathcal{V}_y] = \nu T / \delta^2 \equiv St.$
 $\implies$ Si $St \ll 1$, le terme de dérivée temporelle est négligeable,
- $[\mathcal{C}_x]/[\mathcal{V}_y] = [\mathcal{C}_y]/[\mathcal{V}_y] = \frac{\delta^2 U}{\nu L} = \varepsilon Re$ avec $Re = \frac{\delta U}{\nu}$.
 $\implies$ Si $Re \ll L/\delta$, alors les termes d'advection sont négligeables,
- $[\mathcal{V}_x]/[\mathcal{V}_y] = (\delta/L)^2 = \varepsilon^2$. $\implies$ Ce terme est toujours négligeable.
- Finalement le PMD permet de préciser l'ordre de grandeur du terme $\mathcal{P}$ toujours inconnu :
 $\implies P = \frac{\mu UL}{\delta^2}$.

Bilan : Sous les hypothèses $St \ll 1$ et $Re \ll \varepsilon^{-1}$ (et $\varepsilon = \delta/L \ll 1$) l'équation se simplifie en :

$$-\frac{\partial p^*}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (6)$$

Etude de l' Eq. (3) (Navier-Stokes selon y) :

On montre (exercice) que sous les mêmes hypothèses l'Eq. (3) se réduit à

$$\frac{\partial p^*}{\partial y} = 0, \quad \text{soit} \quad p^* = p^*(x, t) \quad (7)$$

Solution générale de film mince

On retrouve donc les mêmes équations que pour un écoulement parallèle (cf. chapitre 3) :

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial p^*}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \\ p^* &= p^*(x, t) \end{aligned} \right\}$$

La solution est donc de la forme :

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p^*}{\partial x}(x, t) y^2 + A(x, t) y + B(x, t)$$

où $A(x, t)$ et $B(x, t)$ sont à déterminer à l'aide des conditions aux limites en $y = h_1(x, t)$ et $y = h_2(x, t)$.

Cet écoulement correspond à un **écoulement quasi-parallèle quasi-statique** (c.a.d dépendant "lentement" de x et t), localement identique à l'un des écoulements classiques vu au chapitre 3 : Écoulement de Couette, de Poiseuille, de Couette-Poiseuille, ou de film tombant, ou superposition de ceux-ci.

(cf. formulaire, section F)

Si l'on souhaite de plus avoir l'expression de la vitesse transverse $v(x, y, t)$ on peut partir de l'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 p^*}{\partial x^2}(x, t) y^2 - \frac{\partial A}{\partial x}(x, t) y - \frac{\partial B}{\partial x}(x, t)$$

En intégrant par rapport à y , on en déduit que $v(x, y, t)$ est de manière générale un polynôme de degré 3 en y , avec des coefficients dépendants (lentement) de x et t .

Exemple d'application : drainage d'un film sur une paroi verticale

(Exercice 5.4)

Considérons un film liquide d'épaisseur initiale h_0 couvrant une plaque semi-infinie, initialement (à $t = 0$) horizontale.

Pour $t > 0$ la plaque est mise en position verticale et le film s'écoule. Déterminez la loi $h(x, t)$ donnant l'épaisseur du film.

1. Etablissement de l'équation gouvernant $h(x, t)$:

(Après un temps caractéristique $\tau_v = h_0^2/\nu$, l'écoulement devient quasi-statique, on peut utiliser les équations du film mince).

$$NS_y \rightarrow -\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \rightarrow p = P_{atm}$$

$$NS_x \rightarrow \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cancel{\frac{\partial p}{\partial x}} + \rho g = 0$$

Avec les conditions limites $u(x, 0, t) = 0$ et $\tau_{xy}(x, h(x, t), t) = 0$, celle-ci s'intègre pour donner :

$$u(x, y, t) = \frac{g}{2\nu} y(2h(x, t) - y)$$

On reconnaît (localement) la solution classique du film tombant parallèle (cf. Formulaire, F.6).

L'équation de continuité permet alors d'obtenir l'expression de $v(x, y, t)$:

$$Cont \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{g}{\nu} y \frac{\partial h}{\partial x} \rightarrow v(x, y, t) = -\frac{g}{2\nu} y^2 \frac{\partial h}{\partial x}$$

L'évolution temporelle de l'épaisseur du film vérifie $\frac{\partial h}{\partial t} = v(x, h(x, t), t)$. Ceci aboutit à l'équation suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{g}{2\nu} h^2 \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

Exemple d'application : drainage d'un film sur une paroi verticale

(Exercice 5.4 Suite)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{g}{2\nu} h^2 \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

2. Résolution de l'équation :

C'est une équation de transport non linéaire.

Cherchons une solution de la forme $h(x, t) = At^\alpha x^\beta$. En injectant dans l'équation on a :

$$A\alpha t^{\alpha-1} x^\beta = -\frac{g}{2\nu} \left(At^\alpha x^\beta \right)^2 \beta At^\alpha x^{\beta-1} = -\frac{g}{2\nu} \beta A^3 t^{3\alpha} x^{3\beta-1}.$$

Identifions les exposants et le préfacteur :

$$\alpha - 1 = 3\alpha \quad \rightarrow \quad \alpha = -1/2$$

$$\beta = 3\beta - 1 \quad \rightarrow \quad \beta = 1/2$$

$$A\alpha = -\frac{g}{2\nu} \beta A^3 \quad \rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{2\nu}{g}}$$

La solution est donc :

$$h(x, t) = \sqrt{\frac{2\nu x}{gt}}$$

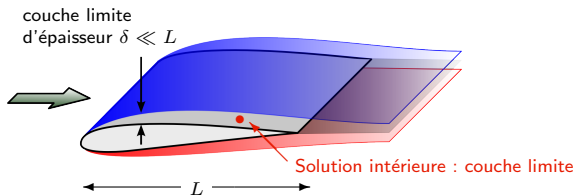
Cette solution n'est pas valable pour $x > X_f(t) = \frac{gh_0^2}{2\nu} t$ car elle conduirait à $h(x, t) > h_0$.
Pour $x > X_f(t)$ la solution est $h(x, t) = h_0$ qui est bien solution de l'équation de départ.

Couche Limite : introduction

Dans les écoulements dans lesquels le nombre de Reynolds $Re = \frac{UL}{\nu}$ est grand (cf. chapitres 9 et 10), la condition d'adhérence $\vec{u} = \vec{0}$ qui doit nécessairement être satisfaite à la surface d'un objet conduit à l'apparition de **couches limites**, films minces d'épaisseur $\delta \ll L$ dans lesquels la vitesse varie rapidement entre la valeur "extérieure" $\vec{u} = \vec{u}_{ext}$ imposée par l'écoulement incident et la valeur $\vec{u} = \vec{0}$ à la paroi.

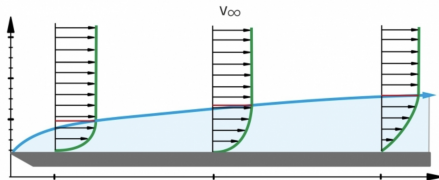
L'étude des couches limites est plus complexe que celle des films minces vue précédemment car l'épaisseur δ n'est pas fixée par la géométrie mais dépend elle-même de la viscosité.

L'étude poussée des couches limites est au programme de M1. Contentons ici de discuter le cas le plus simple de la couche limite sur une plaque plane de longueur L .



Couche Limite : solution de Blasius

Considérons une plaque plane de longueur L , largeur b , plongée dans un écoulement incident $U\vec{e}_x$.



Pour $Re \ll 10^5$ (cf. chapitre suivant), la solution observée est une couche limite laminaire (c.a.d. dans laquelle le champ de vitesse est stationnaire).

L'observation conduit à rechercher une solution autosimilaire : $u(x, y) = Uf(\eta)$ avec $\eta = \frac{y}{\delta(x)}$.

Par analogie avec le premier problème de Stokes, on peut chercher l'épaisseur de la couche limite sous la forme $\delta(x) = \sqrt{\nu t_s}$ où $t_s = x/U$ est le "temps de survol".

On part donc de la loi de vitesse $u(x, y) = U \times f\left(\frac{y}{\delta(x)}\right)$ avec $\delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$

La contrainte visqueuse à la paroi correspondante est $\tau_p = [\tau_{xy}]_{y=0} = \mu[du/dy]_0 = \frac{\mu U}{\delta(x)} f'(0)$.

Le calcul de la fonction $f(\eta)$ donne $f'(0) = 0.332$ (cf. programme M1 et page suivante).

On peut donc déduire la force totale de frottement sur une plaque de longueur L et de largeur b :

$$F_x = \iint \tau_p dS = \int_{z=-b/2}^{+b/2} \int_{x=0}^L \left(\frac{\mu U}{\delta(x)} f'(0) \right) dx dz = 0.332 \times b \mu U \times \int_0^L \sqrt{\frac{U}{\nu x}} dx$$

$$\text{finalement : } F_x = 0.664 \rho b U^{3/2} \nu^{1/2} L^{1/2} = \frac{\rho S U^2}{2} C_f(Re) \text{ avec } C_f(Re) = 1.328 Re^{-1/2}$$

Couche Limite : solution de Blasius

Résolution du problème de Blasius (Programme M1) :

L'équation de continuité ($\partial u / \partial x + \partial v / \partial y$) permet tout d'abord d'estimer l'ordre de grandeur de la vitesse transverse : $V = [v] = U \times \frac{\delta}{L} = \mathcal{O} \left(\frac{\nu U}{x} \right)^{1/2}$.

Introduisons la fonction $F(\eta)$ primitive de la fonction $f(\eta)$. L'équation de continuité permet alors d'exprimer la vitesse transverse $v(x, y)$ ainsi :

$$v(x, y) = \frac{1}{2} \left(\frac{U \nu}{x} \right)^{1/2} [\eta F' - F] .$$

On peut par ailleurs justifier que la pression $p(x, y)$ ne dépend ni de x (ce qui est logique car c'est bien le cas en dehors de la couche limite), ni de y (ce qui est plus délicat à justifier).

En évaluant maintenant l'ordre de grandeur des différents termes dans l'équation de la quantité de mouvement dans la direction x , on montre que les termes dominants sont les suivants :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

En reportant l'expression de $u(x, y)$ et $v(x, y)$ en fonction de $F(\eta)$ et en simplifiant on arrive finalement à l'équation :

$$2F''' + FF'' = 0$$

C'est une équation non linéaire d'ordre 3 qui doit finalement être résolue numériquement.

Questions de cours sur le chapitre 5

Questions de cours :

1. Sous quelles hypothèses le régime d'écoulement de Stokes est-il justifié ? Comment les équations de Navier-Stokes se simplifient-elles dans ce cas ?
2. Quelles sont les principales propriétés des écoulements de Stokes ?
3. Sous quelles hypothèses le régime d' "écoulement de film mince" est-il justifié ? Comment les équations de Navier-Stokes se simplifient-elles dans ce cas ?
4. Estimez, par analogie avec le premier problème de Stokes, l'épaisseur caractéristique $\delta(x)$ d'une couche limite laminaire.

Exercices de cours :

1. Par analyse dimensionnelle, estimez la force de frottement sur une particule sphérique dans le régime de Stokes.
2. En déduire une estimation de la vitesse de chute libre d'une gouttelette d'eau.
3. Drainage d'un film sur une paroi verticale (exercice 5.4).