

Mécanique des fluides



David FABRE

IMFT / UPS
Département de Mécanique

Osborne REYNOLDS
(1842 – 1912)
Tableau de J. Collierde (1904)

6. Introduction à la turbulence : Pertes de charges et couches limites

Questions de cours sur le chapitre 6

Questions de cours :

1. Quels sont les 3 régimes d'écoulements observés dans une canalisation rectiligne ? Quel paramètre permet de caractériser ces régimes ?
2. Définir la notion de perte de charge.
3. Qu'appelle-t-on une perte de charge régulière et singulière ?
4. Qu'est-ce que le diagramme de Moody et quelle est son utilité ?
5. Décrivez succinctement les trois régimes d'écoulement d'une couche limite le long d'une plaque plane.

Exercices de cours :

1. Montrez que le coefficient de perte de charge régulière d'un écoulement laminaire dans une conduite cylindrique (solution de Poiseuille) vaut $\lambda = 64/Re$.
2. Dimensionnement d'un circulateur solaire.

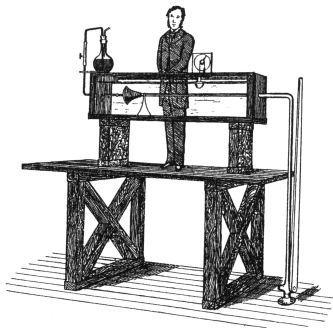
Objectifs du chapitre

- Savoir identifier et décrire les régimes d'écoulement
 - ▶ Laminaire
 - ▶ Transitionnel
 - ▶ Turbulent
- Savoir utiliser l'analyse dimensionnelle et les lois empiriques expérimentales pour prédire :
 - ▶ La perte de charge dans une conduite cylindrique,
 - ▶ Le frottement sur une paroi plane.

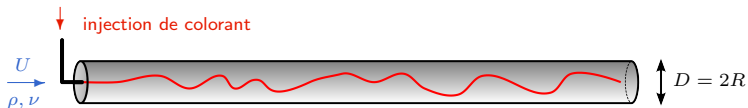
Sommaire

- Écoulements en conduite
 - Expérience de Reynolds
 - Analyse dimensionnelle
 - Régimes d'écoulement
 - Diagramme de Moody
 - Pertes de charge singulières
 - Application : pompe d'un chauffe-eau solaire
- Écoulement le long d'une plaque plane
 - Définitions et analyse dimensionnelle
 - Régimes d'écoulement
 - Coefficient de frottement

Expérience de Reynolds (1883)



Banc expérimental utilisé par Reynolds, exposé à l'Université de Manchester (UK)



$U = \dot{m}/(\rho S)$ vitesse moyenne ou vitesse débitante, déduite du débit-masse $\dot{m}$ et de la section $S = \pi R^2$.

Remarque : si la section est constante U est constante le long du tuyau
(En revanche si S varie, U varie comme $1/S$).

Perte de charge

Définition : On appelle charge hydraulique la quantité $e_m = p + \rho g z + \frac{\rho U^2}{2}$.

On verra au chapitre 8 qu'il s'agit d'une **Energie mécanique par unité de volume**.

Définition :

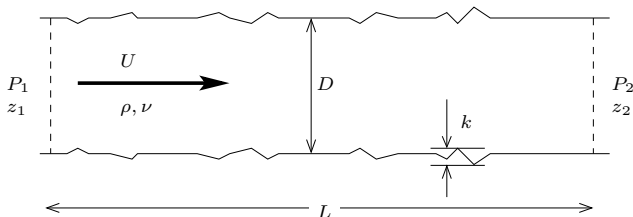
On appelle **perte de charge** la diminution d'énergie mécanique entre deux sections d'une conduite rectiligne.

$$\Delta_1^2 = (P_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho U_1^2) - (P_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho U_2^2)$$

Dans le cas d'un tuyau de section S , constante, on parle de **perte de charge régulière**. Celle-ci est équivalente à une chute de la "pression étoilée" p^* .

$$\Delta_1^2 = (P_1 + \rho g z_1) - (P_2 + \rho g z_2) \equiv p_1^* - p_2^*$$

Analyse dimensionnelle du problème (I)



Formellement, on s'attend à une dépendance de la forme :

$$\Delta_1^2 = \mathcal{F}(U, L, D, k, \rho, \nu)$$

Par **considération géométrique**, on peut justifier que Δ_1^2 est proportionnel à L . On peut donc postuler une dépendance de la forme

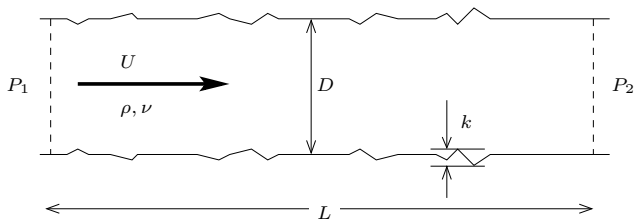
$$\frac{\Delta_1^2}{L} = \mathcal{F}(U, D, k, \rho, \nu)$$

En appliquant les principes de l'analyse dimensionnelle (**exercice**), on peut montrer que

$$\Delta_1^2 = \frac{1}{2} \rho U^2 \times \frac{L}{D} \times \lambda(Re, \varepsilon) \quad (1)$$

où $\lambda(Re, \varepsilon)$ est le **coefficient de pertes de charges** qui ne dépend que de deux paramètres : le nombre de Reynolds $Re = UD/\nu$ et la rugosité relative de la paroi $\varepsilon = k/D$.

Analyse dimensionnelle du problème (II)



Une autre quantité intéressante (mais moins utile en pratique) est la force exercée sur la paroi $\mathcal{S}$ de la conduite.

$$F_z = \left[\iint_{\mathcal{S}} [p\vec{n} - \vec{\tau} \cdot \vec{n}] dS \right] \cdot \vec{e}_z = \iint_{\mathcal{S}} \tau_{zr} dS$$

On montre (cf. exercice complémentaire 3.0) que cette force est liée à la perte de charge par

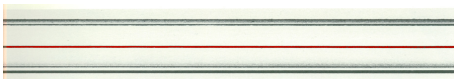
$$F_{z, \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{S}} = S \Delta_1^2 = \frac{1}{2} \rho S U^2 \times \frac{L}{D} \times \lambda(Re, \varepsilon)$$

Observations expérimentales : régimes d'écoulements

Reynolds observe schématiquement trois régimes distincts :

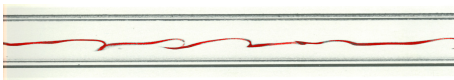
visualisations

$Re \lesssim 2000$: régime laminaire



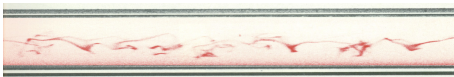
écoulement stationnaire,
axisymétrique, établi, 1D
(écoulement de Poiseuille)

$2000 \lesssim Re \lesssim 4000$: régime de transition



écoulement instationnaire,
3D par intermittence,
sinon relaminarisation

$4000 \lesssim Re$: régime turbulent



écoulement très instationnaire,
fortement 3D, "chaotique"
petits et gros tourbillons

Régime laminaire $Re \lesssim 2000$

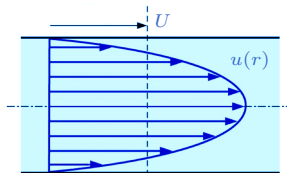
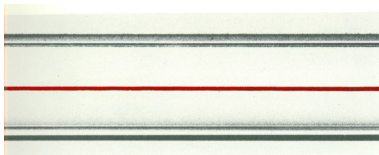
Pour $Re \lesssim 2000$ et pour un tuyau peu ou modérément rugueux ($\epsilon < 0.01$), Reynolds observe le régime dit **laminaire** pour lequel l'écoulement est stationnaire, axisymétrique, établi, 1D.

L'expérience montre qu'il s'agit de l'écoulement de **Poiseuille**, dont le champ de vitesse est donné par (cf. **exercice complémentaire 3.0**) :

$$u(r) = u_{max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

avec $u_{max} = 2U$ et

$$U = -\frac{R^2}{8\mu} \frac{dp^*}{dx} = \frac{R^2}{8\mu} \left(\frac{(p_1 - p_2) + \rho g(z_1 - z_2)}{L} \right) = \frac{R^2}{8\mu} \left(\frac{\Delta_2^1}{L} \right)$$

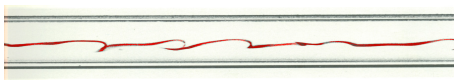


On en déduit que le coefficient de perte de charge $\lambda = \frac{\Delta_2^1}{\frac{1}{2} \rho U^2 \times \frac{L}{D}}$ vaut :

$$\lambda(Re, \epsilon) = \frac{64}{Re}$$

Régime de transition $2000 \lesssim Re \lesssim 4000$

Pour les nombres de Reynolds intermédiaires, compris entre 2000 et 4000 environ (dans des conditions ordinaires), on observe un régime dit **transitoire** ou de transition : "bouffées" de turbulence (écoulement instationnaire et 3D), alternant avec des phases de relaminarisation.



Dans ce régime la perte de charge est caractérisée par une forte intermittence, c'est-à-dire que sa valeur est difficilement prédictible et varie fortement au cours du temps.

Dans une même expérience, Δ_1^2 peut varier d'un facteur 2 entre deux instants différents !

$$\lambda(Re, \epsilon) \in [0.02, 0.04].$$

Ce régime est le plus complexe à décrire et à comprendre : il fait l'objet de nombreuses recherches actuelles, aussi bien par le biais de **campagnes expérimentales** que de **simulations numériques** et d'**analyses théoriques**.

Régime turbulent $4000 \lesssim Re$

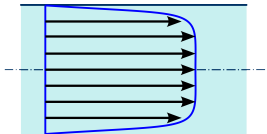
Pour les grands nombres de Reynolds, l'écoulement devient **turbulent** et rentre dans un régime fortement instationnaire, complètement 3D, présentant une structure spatiale très compliquée avec petits et grands tourbillons, et un comportement temporel "chaotique".



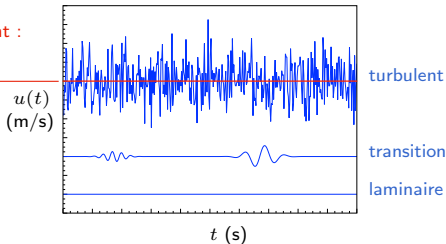
Paradoxalement, ce régime n'est pas le plus compliqué à modéliser si l'on accepte de se restreindre aux **grandeurs moyennes** de l'écoulement (**approche statistique**).

Mesure de vitesse en un point de l'écoulement :

$$\text{vitesse moyenne locale } \bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u \, dt$$



Profil de vitesse moyenne (quasi uniforme)



Coefficient de pertes de charge dans le cas turbulent

Dans le cas turbulent, il n'existe pas de formule du coefficient de perte de charge provenant d'une solution exacte.

En revanche, il existe des formules empiriques obtenues par correlations à partir de mesures expérimentales.

- Cas turbulent, régime "hydrodynamiquement lisse" :

Pour $\varepsilon < 0.01\%$ et $Re < 10^5$ on peut utiliser la formule de Blasius

$$\lambda = 0.316 Re^{-1/4} \quad (2)$$

- Cas turbulent "régime très rugueux" :

Si $\varepsilon > 1\%$ et $Re > 10^5$, on observe que la perte de charge est indépendante de Re et donné par la formule approchée (Karman-Nikuradse)

$$\lambda = \frac{1}{(-2 \log_{10} [\frac{\varepsilon}{3.71}])^2} \quad \left(\text{ou bien } \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon}{3.71} \right) \right) \quad (3)$$

- Cas turbulent, cas général

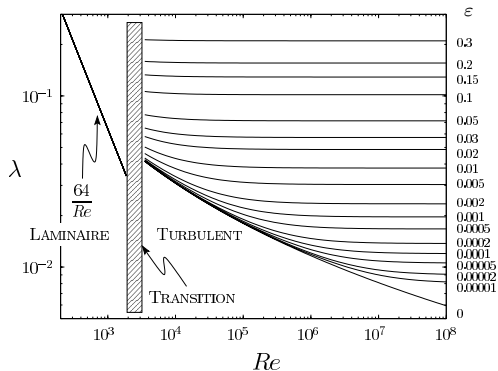
Pour $Re > 4000$ et ε quelconque, on utilise généralement la formule de **Colebrook** :

$$\lambda = \frac{1}{\left(-2 \log_{10} \left[\frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{\varepsilon}{3.71} \right] \right)^2} \quad \left(\text{ou bien } \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{\varepsilon}{3.71} \right) \right) \quad (4)$$

(Cette relation est implicite, mais peut être facilement résolue de manière itérative.)

Diagramme de Moody

Les différentes lois pour le coefficient de perte de charge sont tabulées dans le diagramme de Moody :



Remarques complémentaires

1. Dans des situations particulièrement contrôlées (tuyau parfaitement lisse, aucune perturbation dans l'environnement), la solution laminaire peut être observée jusque $Re = 10^6$ ou au delà !

Pour $Re > 2000$ La solution de Poiseuille cylindrique est donc **métastable**...

2. Le fait que dans le régime turbulent rugueux λ ne dépende plus de Re (et donc de μ) peut sembler paradoxal...

En effet F_z est obtenue en intégrant la contrainte visqueuse pariétale sur la surface, et μ apparaît explicitement dans la formule

$$F_z = \iint_S \tau_{zr} dS \approx 2\pi RL \times \tau_{zr}(R) \approx 2\pi RL \times \mu \left[\frac{\partial u}{\partial r} \right]_{r=R} \implies F_z \text{ proportionnel à } \mu$$

$$\text{or } F_z = \frac{\rho S U^2}{2} \times \frac{L}{D} \times \lambda(\epsilon) \implies F_z \text{ indépendant de } \mu !$$

Explication : on peut écrire $\left[\frac{\partial u}{\partial r} \right]_{r=R} \approx \frac{U}{\delta}$ où δ est l'épaisseur de la couche limite.

Le fait que la force soit indépendante de μ est possible si δ est proportionnel μ .

La couche limite devient donc extrêmement fine lorsque Re est grand ($\delta \approx Re^{-1}$).

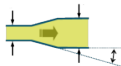
Pertes de charge singulières

On appelle **pertes de charges singulières** la diminution d'énergie mécanique entre deux sections d'une conduite de part et d'autre d'une **singularité**, c'est-à-dire d'une variation *brusque* de la géométrie de la conduite : rétrécissement ou élargissement brusque, changement de direction (coude) ou présence d'un obstacle. En effet cette variation brusque des conditions d'écoulement s'accompagne généralement d'une augmentation du brassage du fluide à grand nombre de Reynolds et donc des frottements visqueux.

Élargissement brusque



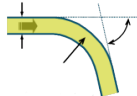
Divergent



Coude brusque



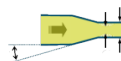
Coude arrondi



Rétrécissement brusque



Convergent



Entrée de canalisation brusque



Entrée de canalisation progressive



Pertes de charge singulières

Une estimation par analyse dimensionnelle montre que les pertes de charge singulières s'écrivent

$$\Delta_1^2 = \frac{1}{2} \rho U^2 K(Re; \text{géométrie}) \quad (5)$$

où U est la vitesse moyenne en amont de la singularité (ou en aval pour un rétrécissement ou une entrée de canalisation) et K désigne le **coefficient de pertes de charge singulières**.

On observe que pour $Re \gtrsim 10^4$ (c.a.d. lorsque l'écoulement est pleinement turbulent) ce coefficient ne dépend pas de Re mais seulement de la géométrie de la jonction.

Les valeurs de K sont données par des formules empiriques ou semi-empiriques en fonction du type de singularité concernée.

Elargissement brusque

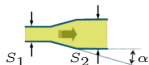


Démo Exo 8.0

$$K = (1 - S_1/S_2)^2$$

Divergent

$$K = (1 - S_1/S_2)^2 \sin \alpha$$



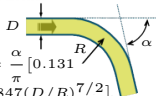
Coude brusque

$$K = \sin^2 \alpha + 2 \sin^4 \alpha / 2$$



Coude arrondi

$$K = \frac{\alpha}{\pi} [0.131 + 1.847(D/R)^{7/2}]$$



Rétrécissement brusque



$$K = (S_2/S_c - 1)^2$$

Convergent

$$K = (S_2/S_c - 1)^2 \sin \alpha$$



Entrée de canalisation brusque

$$K = 0.5$$



Entrée de canalisation progressive

$$K = 0.04$$



Quelques éléments de plomberie standard :

Raccord rectiligne $K = 0.04$; Valve "globe" ouverte $K = 6.4$; valve demi-fermée $K = 9.5$;

Coude 90° standard $K = 0.75$; coude à grand rayon $K = 0.45$;

Raccord en T $K = 0.4$ (ligne → ligne) / $K = 1.3$ (ligne → branche) / $K = 1.5$ (branche → ligne)....

Exercice de cours : dimensionnement d'une pompe pour un chauffe-eau solaire

On souhaite dimensionner une pompe pour faire fonctionner un chauffe-eau solaire.

Le circuit (simplifié) est constitué d'un tuyau de cuivre de diamètre intérieur $d = 8\text{mm}$, rugosité $k = 1.5\mu\text{m}$, longueur totale $L = 60\text{m}$, comportant 20 coudes 90° standard et 2 vannes globe ouvertes.

Le fluide est un mélange eau-glycérol (viscosité $\nu = 2 \cdot 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$, de masse volumique $980\text{kg}/\text{m}^3$).

Le débit attendu est $Q = 250\ell/\text{h}$.

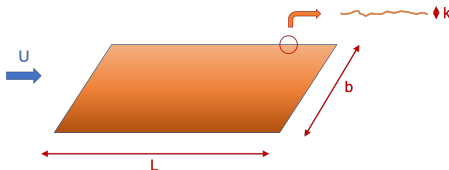
Calculez la perte de charge totale, et en déduite la puissance minimale de la pompe nécessaire pour faire fonctionner le circuit.

Correction : programme Matlab disponible sur Moodle

Frottement sur une plaque plane : définition et analyse dimensionnelle

Considérons une plaque plane rectangulaire de longueur L , largeur b , et rugosité k , sous un écoulement incident de vitesse U (tangent à la plaque).

Intéressons nous à la **Force exercée sur la plaque F_v**



En appliquant les méthodes de l'analyse dimensionnelle et en tenant compte du fait que F_v est proportionnel à b (**considération géométrique**), on montre que :

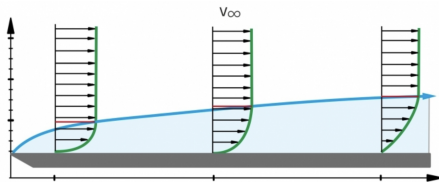
$$F_v = \frac{\rho S U^2}{2} C_f(Re, \epsilon)$$

où $Re = \frac{UL}{\nu}$, $\epsilon = \frac{k}{L}$, $S = Lb$,

et C_f est le coefficient de frottement (sans dimensions).

Cas laminaire

Pour $Re \leq 2 \cdot 10^5$ et $\epsilon < 10^{-5}$, la solution observée est une couche limite laminaire (c.a.d. dans laquelle le champ de vitesse est stationnaire).



L'écoulement est la solution de Blasius (vue au chapitre 5).
On a notamment montré que la force de frottement vaut :

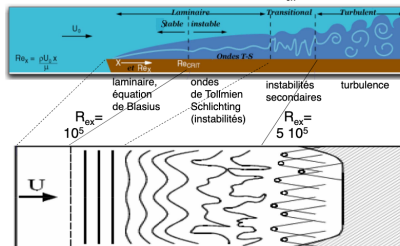
$$F_v = 0.664 \rho b U^{3/2} \nu^{1/2} L^{1/2}$$

Ce qui s'écrit également :

$$F_v = \frac{\rho S U^2}{2} C_f(Re) \text{ avec } C_f(Re) = 1.328 Re^{-1/2}$$

Cas transitionnel

Pour $10^5 < Re < 10^6$, on observe un écoulement transitionnel.

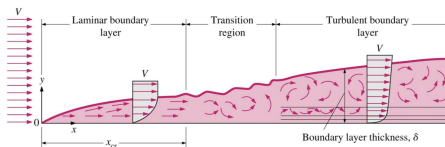


Cet écoulement, particulièrement difficile à expliquer et à prédire, est caractérisé dans un premier temps par des oscillations appelées ondes de Tollmien-Schlichting, qui se déstabilisent ensuite pour conduire à un état désordonné.

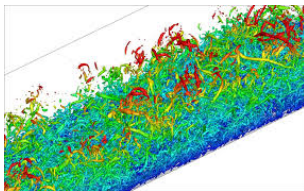
Dans ce régime, comme dans le cas de l'écoulement en conduite, le coefficient de frottement est très intermittent et peut varier d'un facteur 2 au cours d'une même expérience.

Cas turbulent

Lorsque $Re \gg 10^7$ (dans le cas très lisse), ou $Re > 10^5$ (dans le cas rugueux), on observe une couche limite pleinement turbulente (sauf au voisinage immédiat du bord d'attaque où la couche limite est tout d'abord laminaire).



Cet état est très désordonné et caractérisé par la présence de tourbillons de diverses échelles.



Exemple de simulation numérique d'une couche limite turbulente
(Universität Stuttgart)

Cependant si l'on s'intéresse à des quantités moyennes, les propriétés de l'écoulement sont très reproductibles.

Cas turbulent : coefficient de frottement

Diverses corrélations expérimentales existent pour exprimer le coefficient de frottement dans le cas turbulent. Citons les suivantes :

- Dans le cas très lisse, plusieurs corrélations sont utilisées, par exemple :

$$Re = e^{\left[\frac{0.5572}{\sqrt{C_f}} - \ln(C_f) \right]} \quad (\text{loi de Schoenherr, définie par sa fonction réciproque}).$$

$$C_f = 0.030 Re^{-1/7} \quad (\text{Loi de puissance } 1/7, \text{ utilisée en aéronautique}).$$

$$C_f = \frac{0.067}{(\log_{10}(Re) - 2)^2} \quad (\text{Loi de Hugues, utilisée en architecture navale}).$$

Remarque : bien que très différentes, ces différentes expressions donnent des résultats identiques à environ 1% près, dans la gamme $10^6 < Re < 10^9$.

- Dans le cas rugueux :

$$C_f = 0.032 \epsilon^{1/5} \quad (\text{Loi de McNerney}).$$

Remarque :

Dans le cas d'un objet élané de forme plus complexe qu'une plaque plane (aile d'avion, carène de bateau,...) diverses méthodes existent pour étendre la validité de ces formules.

Par exemple dans le domaine de l'architecture navale on utilise la loi de Hugues modifiée :

$$C_f = \frac{0.067(1+\kappa)}{(\log_{10}(Re) - 2)^2}$$

où κ est un facteur de forme dépendant de la géométrie (cf. TDs 1.4 et 6.4).

Couche limite sur une plaque plane

Les différentes corrélations sont rassemblées dans le diagramme suivant, qui est l'équivalent du diagramme de Moody (cf. [Formulaire, section H.1](#)) :

