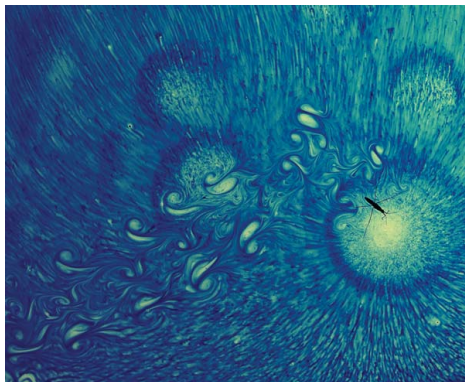


Mécanique des fluides



David FABRE

IMFT / UPS
Département de Mécanique

*Dipôles tourbillonnaires générés
par une araignée d'eau (gerris)
se déplaçant à la surface de l'eau*

© MIT

7. Cinématique des fluides

Questions de cours sur le chapitre 7

Questions de cours :

1. Démontrez l'expression en variables eulériennes de la dérivée particulaire dF/dt d'une quantité physique F .
2. Démontrez l'expression en variables eulériennes de l' accélération $\vec{a}$ dans un fluide.
3. Quelle est l'interprétation physique de la divergence du champ de vitesse ?
4. Quelle est l'interprétation physique du rotationnel du champ de vitesse ?
5. Définir les notions de lignes de courant et de trajectoires. Dans quels cas ces concepts sont-ils équivalents ?
(NB le calcul des lignes d'émission n'est pas au programme).
6. Sous quelles hypothèses peut-on décrire un écoulement à partir d'un fonction de courant ψ ?
Discutez les principales propriétés mathématiques de la fonction ψ .

Exercices de cours :

1. Écoulement hyperbolique (cf. exercice 7.0, $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 0$).
2. Écoulement instationnaire périodique (cf. exercice 7.2).

Sommaire

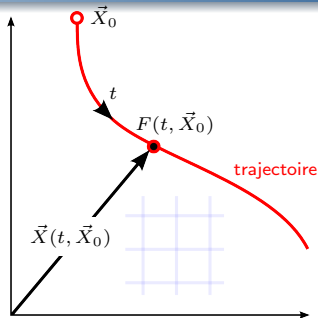
- Description du mouvement d'un fluide
 - Formalismes lagrangien et eulérien
 - Correspondance entre formalismes
- Dérivée matérielle
 - Dérivée particulaire d'un champ scalaire
 - Accélération d'une particule fluide
- Etude des déformations dans un fluide
 - Décomposition des gradients de vitesse
 - Remarques sur le tenseur des taux de déformation
- Visualisation des écoulements
 - Trajectoires
 - Lignes de courant
 - Lignes d'émission
- Fonction de courant

Description lagrangienne : définition

La **description Lagrangienne** consiste à décrire l'écoulement d'un fluide par la donnée, à chaque instant t , et pour chaque **particule fluide** (indexée par la position $\vec{X}_0$ qu'elle occupait à l'instant $t = 0$) :

- de la **trajectoire** $\vec{X}(t; \vec{X}_0)$,
- de l'évolution des grandeurs physiques $F(t; \vec{X}_0)$ **attachées à la particule fluide** (et donc transportées par elle)

Ici $F(t; \vec{X}_0)$ peut désigner la masse volumique ρ , l'énergie interne e ou encore la température T de la particule $\vec{X}_0$.



Remarques :

- Dans ce cours, $\vec{X}_0$ est à considérer comme un 'label', pas comme une variable ; $\vec{X}(t; \vec{X}_0)$ et $F(t; \vec{X}_0)$ sont des fonctions d'une seule variable t .

On peut donc utiliser la notation $d/dt \equiv (\dot{})$ (et on ne dérivera jamais par rapport à $\vec{X}_0$).

- La vitesse de la particule fluide est donc $\dot{\vec{X}}(t; \vec{X}_0) \equiv \frac{d}{dt} \vec{X}(t; \vec{X}_0)$ et son accélération $\ddot{\vec{X}}(t; \vec{X}_0) \equiv \frac{d^2}{dt^2} \vec{X}(t; \vec{X}_0)$
- Le formalisme repose sur le concept de "Particule fluide", définie comme un point matériel supposé se déplacer à la "vitesse du fluide".

Concept faussement intuitif ! On effectue au chapitre 1 que la vitesse "au sens de la MMC" est définie comme une moyenne sur un "volume mésoscopique". Une particule fluide correspond donc en réalité à un volume mésoscopique, pas un "point matériel").

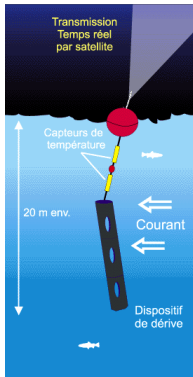
Description lagrangienne : exemple



Interprétation intuitive : la trajectoire lagrangienne d'une "particule fluide" peut être assimilée à la trajectoire d'un objet "passif" convecté par l'écoulement et se déplaçant avec les particules fluides environnantes.

Exemple : bouée dérivante

mesure de la température de surface de la mer,
de la pression atmosphérique et des courants de surface.



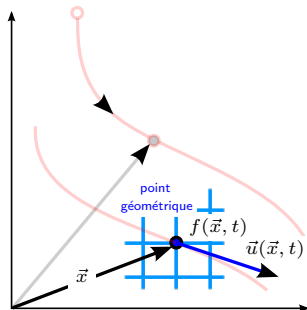
La trajectoire des bouées est suivie par le système de positionnement Argos.



Description eulérienne : définition

La **description Eulérienne** d'un écoulement consiste à décrire celui-ci par la donnée, à chaque instant t et en tout **point géométrique** $\vec{x}$ de l'espace :

- du **champ (vectoriel) de vitesse** $\vec{u}(\vec{x}, t)$,
- des **champs scalaires** $f(\vec{x}, t)$ où $f(\vec{x}, t)$ peut désigner la masse volumique ρ , l'énergie interne e ou la température T .



Remarque :

Sous l'hypothèse des milieux continus, on a vu qu'on peut définir rigoureusement les champs $\vec{u}(\vec{x}, t)$, $\rho(\vec{x}, t)$ et $T(\vec{x}, t)$ par moyennage sur un volume mésoscopique défini au voisinage de chaque point $\vec{x}$.

(cf. chap. 1).

La définition eulérienne est donc finalement plus rigoureuse que la définition lagrangienne !

Description eulérienne : exemple

Anémomètre fixe avec mesure de la qualité de l'air

on mesure la vitesse et la concentration
en polluants de particules fluides différentes
au cours du temps :

on ne suit pas la matière dans son mouvement

→ description eulérienne



Choix du formalisme

- La description **lagrangienne** est en générale privilégiée en mécanique des solides, principalement intéressée par les déformations et les déplacements courts ou faibles (pas d'écoulement $\Rightarrow$ les particules solides restent dans le domaine d'étude)
- Au contraire la mécanique des fluides s'intéresse aux fluides en écoulement (taux de déformations et taux de déplacement = vitesse des particules fluides) : les particules fluides sont susceptibles de traverser le domaine d'étude pour en sortir.

nouvelle particule fluide



particule fluide sortante

Il est donc difficile de suivre la matière dans son mouvement, et on privilégiera alors une description **eulérienne**.

Relations entre descriptions lagrangienne et eulérienne

Considérons la particule (de label $\vec{X}_0$) occupant la position $\vec{x}$ à l'instant t

$$\vec{X}(t; \vec{X}_0) = \vec{x}$$

alors, par définition :

$$F(t; \vec{X}_0) = f(\vec{X}(t; \vec{X}_0), t) \quad (\text{par ex., température de la particule de label } \vec{X}_0) \quad (1)$$

$$\dot{\vec{X}}(t; \vec{X}_0) = \vec{u}(\vec{X}(t; \vec{X}_0), t) \quad (\text{vitesse de la particule de label } \vec{X}_0) \quad (2)$$

→ On peut ainsi passer d'une formulation à l'autre à l'aide de ces relations.

Variation temporelle d'une quantité scalaire transportée par une particule fluide

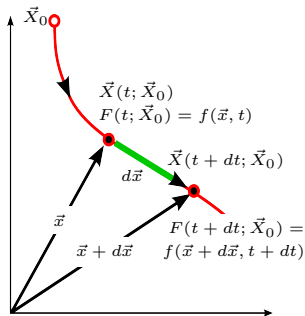
Soit $\vec{X}_0$ la particule fluide située en $\vec{x}$ à l'instant t :

$$\vec{X}(t; \vec{X}_0) = \vec{x}$$

Comment calculer la **variation temporelle** de F :

$$\dot{F}(t; \vec{X}_0) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{F(t + dt; \vec{X}_0) - F(t; \vec{X}_0)}{dt}$$

en fonction des champs eulériens $f(\vec{x}, t)$ et $\vec{u}(\vec{x}, t)$?



[Démonstration...] $\longrightarrow \dot{F}(t, \vec{X}_0) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{F(t + dt; \vec{X}_0) - F(t; \vec{X}_0)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \text{grad } f \cdot \vec{u}$

Dérivée particulière d'un champ scalaire

Définition :

On appelle **dérivée particulière** (ou dérivée matérielle) du champ eulérien $f(\vec{x}, t)$ la quantité

$$\frac{df}{dt} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{\text{dérivée temporelle intrinsèque}} + \underbrace{\vec{\text{grad}} f \cdot \vec{u}}_{\text{dérivée convective}}$$

Remarque : la dérivée particulière est parfois aussi notée $\frac{Df}{Dt}$.

Exemple :

Par une belle journée d'été une Montgolfière s'élève dans le ciel. Le pilote observe sur son thermomètre une baisse de température. Celle-ci est-elle de nature intrinsèque ou convective ?

Le soir, en pliant sa toile, le pilote observe de nouveau une baisse de température. Intrinsèque ou convective ?

Accélération d'une particule fluide

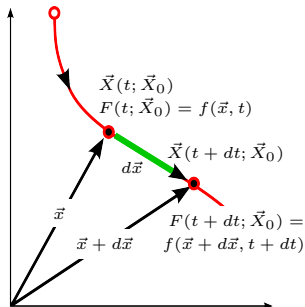
Soit $\vec{X}_0$ la particule fluide située en $\vec{x}$ à l'instant t :

$$\vec{X}(t; \vec{X}_0) = \vec{x}$$

Comment calculer l'**accélération** cette particule fluide :

$$\vec{a}(t, \vec{X}_0) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\dot{\vec{X}}(t + dt; \vec{X}_0) - \dot{\vec{X}}(t; \vec{X}_0)}{dt}$$

en fonction du champ eulérien de vitesse $\vec{u}(\vec{x}, t)$?



[Démonstration...] $\rightarrow \vec{a}(t, \vec{X}_0) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\dot{\vec{X}}(t + dt; \vec{X}_0) - \dot{\vec{X}}(t; \vec{X}_0)}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{g} \text{rad}(\vec{u}) \cdot \vec{u}$

Remarque :

En introduisant la dérivée particulaire du champ de vitesse eulérien $\vec{u}(\vec{x}, t)$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{g} \text{rad}) \vec{f}$$

Notation "pré-MMC" a interpréter "composante par composante", mais qui ne marche qu'en coordonnées cartésiennes !

(cf. formulaire, annexe D pour l'expression de $\vec{g} \text{rad}(\vec{u})$ et de l'accélération en coordonnées cylindriques et sphériques).

Généralisation : dérivée particulière d'un champ vectoriel

Définition :

On appelle **dérivée particulière** (ou dérivée matérielle) du champ eulérien vectoriel $\vec{f}(\vec{x}, t)$ la quantité

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} + \vec{\text{grad}}(\vec{f}) \cdot \vec{u} \quad \left(\equiv \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{f} \right)$$

avec $\left(\vec{\text{grad}}(\vec{f}) \right)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \equiv f_{i,j}$. (définition du tenseur gradient d'un vecteur, convention (1)).

Remarque : Il existe une autre convention possible (convention (2)) pour définir le tenseur gradient d'un vecteur.

$$\left(\vec{\nabla} \otimes \vec{f} \right)_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} f_j \equiv f_{j,i}$$

On remarque que ces deux définitions sont transposées l'une de l'autre : $\vec{\text{grad}}(\vec{f}) = \left(\vec{\nabla} \otimes \vec{f} \right)^T$

Dans la suite de ce cours on utilise la convention (1), attention car certains ouvrages utilisent la convention (2) !

Etude des déformations dans un fluide

Considérons deux particules séparées à l'instant t d'une distance $\delta \vec{x}$ (de faible amplitude). On montre qu'à un instant ultérieur $(t + dt)$ celles-ci sont séparées d'une distance

$$[\text{Démonstration}] \quad \longrightarrow \quad \delta \vec{x}' = \delta \vec{x} + (\vec{g} \text{rad}(\vec{u})) \cdot \delta \vec{x} dt$$

Cette expression s'écrit également, avec les notations du cours MMC2 :

$$\delta \vec{x}' = \underbrace{\left[\vec{1} + \vec{L} dt \right]}_{\vec{F}} \cdot \delta \vec{x} \quad \text{avec } \vec{L} = \vec{g} \text{rad}(\vec{u})$$

Interprétations :

- La quantité $(\delta \vec{x}' - \delta \vec{x}) = \underbrace{[\vec{g} \text{rad}(\vec{u}) dt]}_{\vec{H}} \cdot \delta \vec{x}$ est donc le **déplacement relatif**

entre les deux particules.

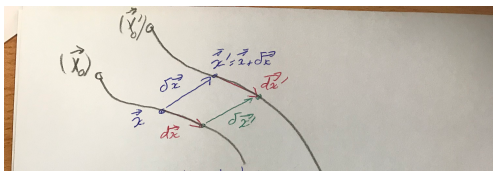
- On peut également écrire cette relation sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \delta \vec{x} = [\vec{g} \text{rad}(\vec{u})] \cdot \delta \vec{x}$$

La quantité $[\vec{g} \text{rad}(\vec{u})] \cdot \delta \vec{x}$ est donc le taux de déplacement relatif, c.a.d. la **vitesse relative** entre les deux particules.

Remarque : Si $\vec{L}$ est uniforme (champ de déformation homogène), alors les relations restent vraies si $\delta \vec{x}$ est d'amplitude quelconque (cf. cours MMC2).

Etude des déformations dans un fluide : DEMONSTRATION



Supposons qu'à l'instant t :

- la particule (x_0) est en $\vec{x}$
- la particule (x'_0) est en $\vec{x}' = \vec{x} + \delta \vec{x}$

Entre t et $t+dt$:

- la particule (x_0) se déplace de $d\vec{x} = \vec{u}(\vec{x}, t) dt$
- la particule (x'_0) se déplace de $d\vec{x}' = \vec{u}(\vec{x}', t) dt$
 $= \vec{u}(\vec{x} + \delta \vec{x}, t) dt$
 $= [\vec{u}(\vec{x}) + \text{grad}(\vec{u}) \cdot \delta \vec{x}] dt$

$\Rightarrow$ L'écart relatif entre les particules à l'instant $t+dt$

et donc : $\delta \vec{x}' = (\vec{x}' + d\vec{x}') - (\vec{x} + d\vec{x})$

$$= \delta \vec{x} + (d\vec{x}' - d\vec{x})$$

$$= \delta \vec{x} + \text{grad}(\vec{u}) \cdot \delta \vec{x} dt$$

et le Taux de déplacement relatif vaut :

$$\frac{\delta \vec{x}' - \delta \vec{x}}{dt} = \text{grad}(\vec{u}) \cdot \delta \vec{x}$$

Etude des déformations dans un fluide : démonstrations avec le programme

L'étude du tenseur gradient des vitesses donne donc accès aux déformations dans un écoulement.

Afin de comprendre les différents cas possibles commençons par regarder le cas où le gradient des vitesses est uniforme (**exercice 7.0 : écoulements linéaires**).

On pourra étudier différents cas avec le programme : [Ecoulement2D.py](#)

Décomposition du tenseur des gradients de vitesse

Décomposition canonique du tenseur des gradients de vitesse :

$$\vec{\text{grad}}(\vec{u}) = \underbrace{\frac{1}{2} \left[\vec{\text{grad}}(\vec{u}) + {}^t\vec{\text{grad}}(\vec{u}) \right]}_{\substack{\vec{D} \text{ symétrique} \\ ({}^t\vec{D} = \vec{D})}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left[\vec{\text{grad}}(\vec{u}) - {}^t\vec{\text{grad}}(\vec{u}) \right]}_{\substack{\vec{R} \text{ antisymétrique} \\ ({}^t\vec{R} = -\vec{R})}}$$

avec

$$\begin{aligned} \vec{D} : \quad D_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \rightarrow \text{tenseur des taux de déformation} \\ \vec{R} : \quad R_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}) \quad \rightarrow \text{tenseur des taux de rotation} \end{aligned}$$

De plus, $\vec{D}$ peut se décomposer en une partie sphérique $\vec{S}$ et une partie à trace nulle $\vec{D}'$ appelée déviateur :

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \vec{S} + \vec{D}' \quad \text{avec :} \\ \vec{S} &= \frac{\text{div}(\vec{u})}{d} \vec{1} \quad \rightarrow \text{tenseur du taux de dilatation} \\ \vec{D}' &= \vec{D} - \vec{S} \quad \rightarrow \text{tenseur des taux d'étirement} \end{aligned}$$

($d = 2$ ou 3 ; nombre de dimensions spatiales).

Etude des cas élémentaires en 2D :

Exercice 7.0, et programmes Ecoulement2D.m ou Ecoulement2D.py

Ce qui se cache derrière le tenseur des gradients de vitesse ...

- La partie sphérique correspond à une dilatation pure (ou compression pure).

En effet, pour toute distance élémentaire $\delta \vec{x}$, on a $\vec{S} \cdot \delta \vec{x} = \frac{\text{div}(\vec{u})}{d} \delta \vec{x}$.

- (en 3D) : Toutes les distances sont dilatées avec un taux de variation $\frac{\text{div}(\vec{u})}{3}$, et les volumes sont dilatés avec un taux de variation $\text{div}(\vec{u})$.

La divergence s'interprète donc comme le taux de variation relatif du volume élémentaire $\delta \mathcal{V}$ de la particule fluide :

$$\text{tr}(\vec{\vec{D}}) = \text{div} \vec{u} = \frac{1}{\delta \mathcal{V}} \frac{d\delta \mathcal{V}}{dt}$$

- (en 2D) : Toutes les distances sont dilatées avec un taux de variation $\frac{\text{div}(\vec{u})}{2}$, et les aires sont dilatées avec un taux de variation $\text{div}(\vec{u})$.

La divergence s'interprète donc comme le taux de variation relatif de l'aire élémentaire $\delta \mathcal{A}$ de la "particule fluide 2D" :

$$\text{tr}(\vec{\vec{D}}) = \text{div} \vec{u} = \frac{1}{\delta \mathcal{A}} \frac{d\delta \mathcal{A}}{dt}$$

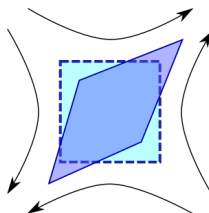
Ce qui se cache derrière le tenseur des gradients de vitesse ...

- Le déviateur correspond à un **étirement pur** qui préserve le volume de la particule fluide.

Remarque :

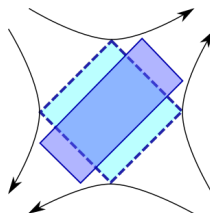
Le tenseur $\vec{\vec{D}}$ (de même que son déviateur $\vec{\vec{D}}'$) n'est en général pas diagonal. Cependant on montre (MMC) qu'il existe une base, appelée **base des directions propres** de la matrice correspondante, dans laquelle le tenseur est diagonal.

Exemples en 2D : (Exercice complémentaire)



Dans une base impropre

$$\vec{\vec{D}}' \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Dans la base propre

$$\vec{\vec{D}}' \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ce qui se cache derrière le tenseur des gradients de vitesse (suite) ...

Le **tenseur des taux de rotation** $\vec{\vec{R}}$ est antisymétrique, et peut sans perte de généralité s'écrire sous la forme

$$\vec{\vec{R}} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

où l'on remarque que $\vec{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z) = \frac{1}{2} \text{rot}(\vec{u})$.

On a alors

$$\vec{\vec{R}} \cdot \delta \vec{x} = \vec{\Omega} \wedge \delta \vec{x}$$

et $\vec{\Omega}$ s'interprète donc comme la **vitesse angulaire** locale du fluide, c'est-à-dire comme le **vecteur rotation instantané** de la particule fluide.

$\vec{\Omega}$ est parfois appelé **vecteur tourbillon**, car il permet de d'identifier la présence de structures tourbillonnaires (tourbillons et nappes tourbillonnaires).

On préfère souvent au vecteur tourbillon la notion de **vorticité** $\vec{\omega}$, définie comme le rotationnel du champ de vitesse :

$$\vec{\omega} = \text{rot}(\vec{u}) = 2\vec{\Omega}$$

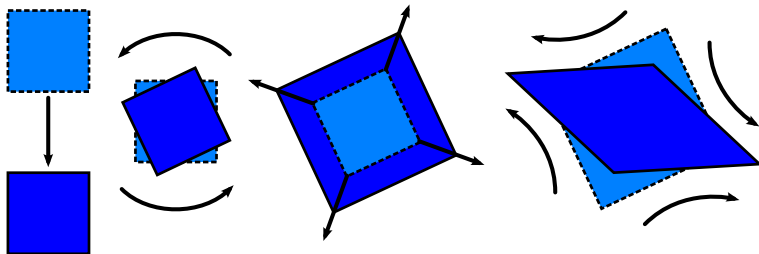
On en déduit que la vorticité correspond donc au double de la vitesse angulaire locale du fluide.

L'étude du champ de vorticité $\vec{\omega}$ et des structures tourbillonnaires est l'objet de la **dynamique tourbillonnaire**, domaine d'étude transversal de la mécanique des fluides dont les fondations ont été posées dans la seconde moitié du 19^{ème} siècle par Helmholtz et Kelvin notamment.

En résumé : évolution d'un élément de fluide

$$\vec{u}(\vec{x} + \delta\vec{x}, t) = \underbrace{\vec{u}(\vec{x}, t)}_{\text{translation en bloc}} + \underbrace{\vec{\Omega} \wedge \delta\vec{x}}_{\text{rotation en bloc}} + \underbrace{\vec{S} \cdot \delta\vec{x}}_{\text{dilatation pure}} + \underbrace{\vec{D}' \cdot \delta\vec{x}}_{\text{étirement pur}}$$

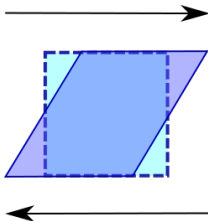
mouvement rigidifiant
déformation $\vec{D} \cdot \delta\vec{x}$



Remarque : cisaillement simple ...

Le **cisaillement simple** est une déformation définie par le tenseur (2D) suivant :

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



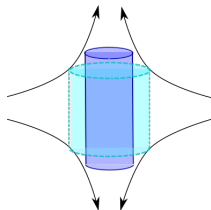
On montre (cf. MMC2) Que cet écoulement n'est pas une déformation pure mais la superposition d'une rotation pure et d'un étirement pur.

Remarques sur le tenseur des taux de déformations ...

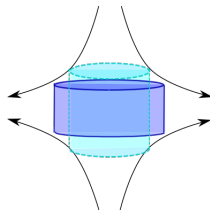
Exemples en 3D : (Exercice) Pour un écoulement isovolume 3D, dans la base propre on peut écrire

$$\vec{\vec{D}} = \begin{pmatrix} D_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & D_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{avec } D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = 0.$$

Cas particulier : si $D_{xx} = D_{yy} = E$, (et donc $D_{zz} = -2E$) le tenseur est à symétrie cylindrique.



si $E < 0$:
Etirement monoaxial



si $E > 0$:
Etirement biaxial

Trajectoires

Une **trajectoire** est le chemin suivi par une particule fluide $\vec{X}_0$ donnée au cours du temps :

$$\mathcal{T}_{\vec{X}_0} = \{ \vec{X}(t, \vec{X}_0) ; \quad t \in [t_0, \infty) \}$$

Il s'agit d'un concept essentiellement **lagrangien**.

Cela dit, si l'on part d'une description eulérienne de l'écoulement, on peut reconstruire les trajectoires à partir de la propriété $\dot{\vec{X}} = \vec{u}(\vec{X}(t; \vec{X}_0), t)$.

[Exemple]

La visualisation expérimentale des trajectoires s'effectue par la prise d'une photo à temps de pose long de l'écoulementensemencé de particules réfléchissantes. Les trajectoires sont alors matérialisées par les traînées lumineuses correspondant à l'impression sur la pellicule (ou les capteurs électroniques) de la lumière réfléchié par les particules au cours de leur déplacement.

Trajectoires : exemple

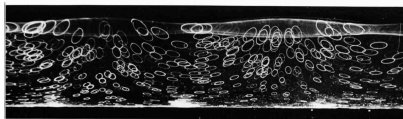
Trajectoire des particules fluide dans un canal à houle avec réflexion :



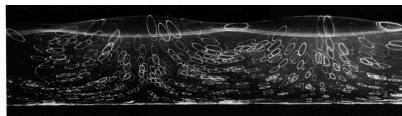
No reflection: pure progressive waves



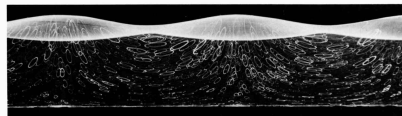
24% reflection



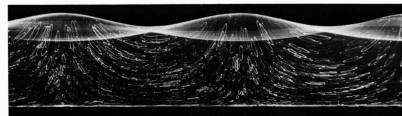
38% reflection



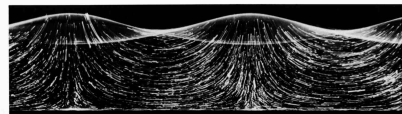
53% reflection



71% reflection



85% reflection



100% reflection: pure standing waves

Lignes de courant

Une **ligne de courant** est une courbe définie, à un instant t donné, par

$$\mathcal{L}_{t,\vec{x}_0} = \{ \vec{x} / d\vec{x}|_{\mathcal{L}(t)} \times \vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{0} \quad ; \quad \vec{x}_0 \in \mathcal{L}_{t,\vec{x}_0} \}$$

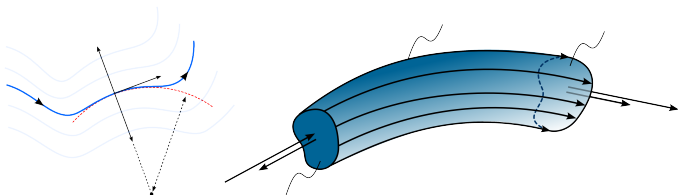
où $d\vec{x}|_{\mathcal{L}(t)}$ désigne le déplacement élémentaire le long de la ligne de courant considérée.

Il s'agit d'un concept essentiellement **eulérien**.

Définition équivalente :

$$\mathcal{L}_{t,\vec{x}_0} = \{ \vec{x}(s) / \frac{d\vec{x}}{ds} = \vec{u}(\vec{x}, t) \quad ; \quad s \in [-\infty, \infty] \}$$

Sous cette seconde forme, s est un paramétrage de la courbe qui peut être interprété comme un "pseudo-temps". Les lignes de courant sont donc des pseudo-trajectoires construites à partir d'un écoulement "figé en temps".



Concepts dérivés :

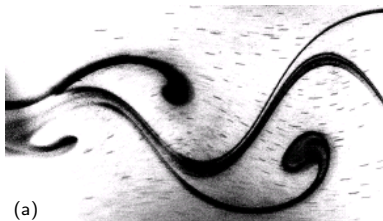
Une **surface de courant** est l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé.

Un **tube de courant** est le volume délimité par une surface de courant

Visualisation des lignes de courant

La visualisation expérimentale des lignes de courant s'effectue par la prise d'une photo à temps de pose court de l'écoulement ensemencé de particules réfléchissantes. Les lignes de courant peuvent alors se déduire des courts segments de traînée lumineuse laissée par les particules sur le cliché.

Exemple : Ecoulement instationnaire derrière un cylindre



(a)



(b)

(Le fluide va de gauche à droite et le cylindre se trouve à gauche juste en dehors de l'image)

(a) Visualisation du déplacement des particules pendant le temps de pose.

(b) Reconstruction de quelques lignes de courant.

Remarque : sur cette photo l'écoulement est aussi visualisé par une émission de colorant à la surface du cylindre.

Ces structures sont des **lignes d'émission**.

Lignes d'émission

Une **ligne d'émission** correspond à l'ensemble des positions occupées à un instant donné t par toutes les particules fluides qui sont passées auparavant (à un instant antérieur $\tau < t$) au même point géométrique $\vec{X}_0$:

$$\mathcal{E}(t) = \{ \vec{X}(t, \vec{X}_0) / \exists \tau < t, \quad \vec{X}(\tau, \vec{X}_0) = \vec{X}_0 \}$$

La visualisation expérimentale d'une ligne d'émission s'effectue par la prise d'une photo à l'instant t d'un filet de colorant émis en continu dans le fluide au point $\vec{X}_0$.

A titre d'exemple le panache de fumée d'une cigarette correspond à la ligne d'émission provenant du bout incandescent.



Propriétés

Pour un écoulement stationnaire, on montre que les trajectoires et les lignes de courant (ainsi que les lignes d'émission) sont confondues.

Démonstration : cf. MMC2

En revanche, pour un écoulement instationnaire, les trajectoires et les lignes de courant sont en général des courbes différentes !

Exemple : Ecoulement instationnaire périodique (7.2 ; exercice de cours).

Fonction de courant (écoulement 2D incompressible)

Considérons un écoulement bidimensionnel de la forme $\vec{u} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y$.

Théorème :

Si $\text{div}(\vec{u}) = 0$, alors il existe une fonction $\psi(x, y)$ telle que

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Propriétés :

- ψ est constante le long des lignes de courant. [Démonstration]
- Le flux volumique à travers un tube de courant bordé par deux lignes de courant d'équation $\psi = \psi_1$ et $\psi = \psi_2$ (et traversé par une surface transverse S) vaut :

$$q_v = \left| \int_S \vec{u} \cdot \vec{n} dS \right| = |\psi_2 - \psi_1| \quad \text{[Démonstration]}$$

NB : $[\psi] = m^2 s^{-1}$, l'expression précédente définit donc un flux volumique par unité de largeur dans la direction transverse.

- Si l'écoulement est décrit en coordonnées polaires par $\vec{u} = u_r \vec{e}_r + u_\theta \vec{e}_\theta$ alors on peut utiliser $\psi(r, \theta)$:

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Fonction de Stokes (écoulement incompressible à symétrie de révolution)

Considérons un écoulement à symétrie de révolution de la forme $\vec{u} = u_r \vec{e}_r + u_z \vec{e}_z$
 $(r = \sqrt{x^2 + y^2})$.

Théorème :

Si $\text{div}(\vec{u}) = 0$, alors il existe une fonction $\Psi(r, z)$ telle que

$$u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

Propriétés :

- Ψ est constante le long des surfaces de courant. [Démonstration]
- Le flux volumique à travers un tube de courant bordé par deux surfaces de courant d'équation $\Psi = \Psi_1$ et $\Psi = \Psi_2$ (et traversé par une surface transverse S) vaut :

$$Q_v = \int_S \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 2\pi |\Psi_2 - \Psi_1|$$

NB : $[\Psi] = m^3 s^{-1}$, l'expression précédente définit donc bien un flux volumique.

- Si l'écoulement est décrit en coordonnées sphériques par $\vec{u} = u_R \vec{e}_R + u_\Theta \vec{e}_\Theta$
 (avec $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$), alors on peut travailler à partir de la fonction $\Psi(R, \Theta)$:

$$\vec{u} = r \text{rot} ([\Psi(R, \Theta)/(R \sin \Theta)] \vec{e}_z), \quad \text{c.a.d :} \quad \begin{cases} u_R &= -\frac{1}{R^2 \sin \Theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta}, \\ u_\Theta &= \frac{1}{R \sin \Theta} \frac{\partial \Psi}{\partial R}. \end{cases} \quad (3)$$

Généralisation : "vecteur de courant"

Les notions de fonction de courant et de fonction de Stokes sont des cas particulier d'un outil plus général appelé "vecteur de courant" ou "Potentiel-vecteur", noté $\vec{\psi}$.

Propriété : Si $\text{div}(\vec{u}) = 0$, alors il existe un champ de vecteurs $\vec{\psi}(\vec{x}, t)$ telle que $\vec{u} = \text{rot}(\vec{\psi})$.

On retrouve les expressions précédentes en prenant :

- **Cas 2D :** $\vec{\psi} = \psi(x, y)\vec{e}_z$.
- **Cas axi :** $\vec{\psi} = [\Psi(r, z)/r]\vec{e}_\varphi$

(voir formulaire pour les expressions du rotationnel en coordonnées cylindriques).