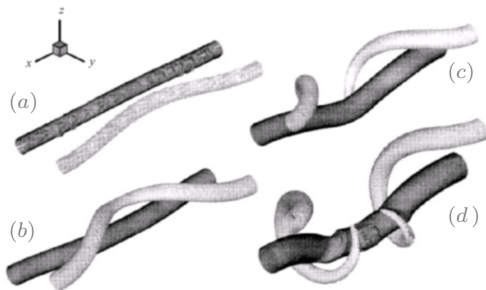


Mécanique des fluides

David FABRE

IMFT / UPS

Département de Mécanique



*Interaction entre deux
tourbillons contrarotatifs*

© P. Brancher, IMFT

8. Equations-bilan

Objectifs du chapitre :

- Etablir les équations-bilan du mouvement d'un fluide **sous forme intégrale** et **sous forme locale** en considérant le cas général d'un gaz compressible.
(Généralisation du chapitre 4 où les équations du mouvement ont été établies sous forme locale dans le cas d'un liquide incompressible).
- Caractériser par analyse dimensionnelle le régime d'écoulement inertiel et incompressible , qui sera l'objet des chapitres 9 et 10.

Questions de cours sur le chapitre 8

Questions de cours :

1. Énoncez le théorème du transport, donnez une démonstration de votre choix, et expliquez son utilité.
2. Par analyse dimensionnelle de l'équation de Navier-Stokes, donnez la jauge p_1 des variations de pression dans le régime d'écoulement inertiel.
3. Par analyse dimensionnelle de l'équation de continuité, justifiez que si $M \ll 1$ un gaz se comporte comme un fluide incompressible.

Exercices de cours :

En précisant toutes les formules d'analyse vectorielle et tensorielle issues du formulaire nécessaires aux démonstrations :

1. Établir le bilan intégral de masse sur un volume de contrôle fixe (formulaire, section C.1, relation C.3).
2. En déduire le bilan local de masse, également appelé équation de continuité (formulaire, section C.1, relation C.1).
3. Établir le bilan intégral de quantité de mouvement sur un volume de contrôle fixe (formulaire, section C.2, relation C.6),
4. En déduire le bilan local de quantité de mouvement sous forme conservative (formulaire, section C.2, relation C.5), DANS LE CAS GÉNÉRAL D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE. (on pourra ne pas tenir compte du terme en gris).
5. Déduire de celle-ci l'équation de Navier-Stokes sous sa forme habituelle (formulaire, section C.2, relation C.4).

NB il n'est pas demandé d'apprendre par cœur toutes les formes des équations-bilan !

Sommaire

- Définitions et outils mathématiques
 - Equations-bilan : généralités
 - Outils mathématiques : Flux et théorème de transport
- Equations-bilan sous forme locale et intégrale
 - Bilan de volume
 - Bilan de masse
 - Bilan de quantité de mouvement
 - Bilan d'Energie
 - Autres équations-bilan
- Caractérisation du régime inertiel incompressible
 - Analyse dimensionnelle de l'équation de Navier-Stokes
 - Analyse dimensionnelle de l'équation de continuité

Volume matériel vs. Volume fixe

- On appelle **volume matériel** $\mathcal{D}(t)$ un volume constitué des mêmes particules fluides, suivi au cours du temps. C'est donc un concept Lagrangien et l'équivalent d'un **système fermé**, qui n'échange pas de matière avec l'extérieur mais qui peut cependant échanger de la quantité de mouvement, du travail ou de la chaleur.
- On appelle **volume de contrôle** Ω un volume fixe dont la frontière peut être traversée par de la matière entrante et sortante. Il s'agit donc d'un concept Eulerien équivalent à un **système ouvert** qui peut échanger matière, quantité de mouvement, travail et chaleur avec l'extérieur.



Volume de contrôle Ω

Problématique de ce chapitre :

Les lois de la physique (lois de conservation de masse, de quantité de mouvement, d'énergie), s'écrivent naturellement en considérant un **volume matériel** $\mathcal{D}(t)$.

Comment les exprimer sur un **volume de contrôle** Ω , concept plus adapté à la mécanique des fluides ?

Flux d'une quantité à travers une surface (rappel)

Définition : Flux de (F) = quantité de (F) traversant une surface par unité de temps.

A. Pour une quantité physique (scalaire) représentée par sa densité volumique f :

- En considérant une surface S séparant deux domaines (1) et (2), on définit le Flux de f à travers la surface (orientée de 1 vers 2) :

$$\Phi_{f,(S,1 \rightarrow 2)} = \int_S f \vec{u} \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} dS$$

Démonstration : voir planche suivante

- Pour une surface fermée de normale sortante $\vec{n}$, on définit le flux (algébrique) sortant :

$$\Phi_f = \oint_S f \vec{u} \cdot \vec{n} dS$$

On appliquera ces formules avec $f = \rho$ (flux de masse), $f = 1$ (flux de volume), $f = \rho e$ (flux d'énergie interne, où e est l'énergie interne massique), ...

B. pour une quantité vectorielle $\vec{f}$:

- Pour une surface S orientée de (1) vers (2) :

$$\vec{\Phi}_{\vec{f},(S,1 \rightarrow 2)} = \int_S \vec{f} (\vec{u} \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2}) dS = \int_S (\vec{f} \otimes \vec{u}) \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} dS$$

- De même pour une surface fermée, on définit le flux sortant :

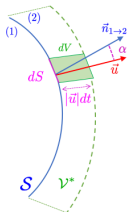
$$\vec{\Phi}_{\vec{f}} = \oint_S \vec{f} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = \oint_S (\vec{f} \otimes \vec{u}) \cdot \vec{n} dS$$

On appliquera ces formules avec $\vec{f} = \rho \vec{u}$ (flux de quantité de mouvement).

Flux d'une quantité à travers une surface (rappel)

Démonstration

Flux Φ_f de la quantité scalaire f à travers la surface $\mathcal{S}$ (orientée de 1 vers 2) :



$$\Phi_{f,(\mathcal{S},1 \rightarrow 2)} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \int_{\mathcal{V}^*} f dV$$

$$dV = |\vec{u}|dt \times dS \times \cos \alpha = \vec{u} \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} dS dt$$

D'où la formule attendue :

$$\Phi_{f,(\mathcal{S},1 \rightarrow 2)} = \int_{\mathcal{S}} f \vec{u} \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} dS$$

Théorème du transport

Théorème :

Considérons un domaine matériel mobile $\mathcal{D}(t)$ coïncidant à l'instant t avec un volume de contrôle fixe Ω (bordé par un contour $\partial\Omega$).

La dérivée matérielle de la quantité intégrale $F_{\mathcal{D}} = \int_{\mathcal{D}(t)} f dV$ s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} f dV = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \oint_{\partial\Omega} f \vec{u} \cdot \vec{n} dS$$

Ce qui s'écrit aussi, en notant $F_{\Omega} = \int_{\Omega} f dV$:

$$\frac{dF_{\mathcal{D}}}{dt} = \frac{\partial F_{\Omega}}{\partial t} + \oint_{\partial\Omega} f \vec{u} \cdot \vec{n} dS$$

C.a.d. : "Le taux de variation d'une quantité intégrale sur un volume matériel est égale à la somme du taux de variation de la quantité intégrale sur un volume fixe, plus le flux algébrique sortant à travers la frontière du volume."¹

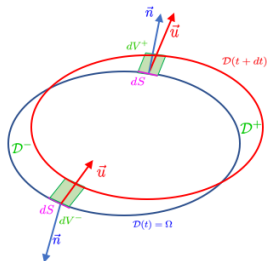
- Dans le cas d'une quantité intégrale $\vec{F}_{\mathcal{D}} = \int_{\mathcal{D}(t)} \vec{f} dV$ associée à une quantité locale vectorielle $\vec{f}$, le théorème s'écrit :

$$\frac{d\vec{F}_{\mathcal{D}}}{dt} = \frac{\partial \vec{F}_{\Omega}}{\partial t} + \oint_{\partial\Omega} \vec{f}(\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = \frac{d\vec{F}_{\Omega}}{dt} + \oint_{\partial\Omega} (\vec{f} \otimes \vec{u}) \cdot \vec{n} dS$$

1. Remarque : dans ce cours, de même que dans le cours de MMC2, la notation $\frac{\partial}{\partial t}$ est utilisée pour noter la dérivée d'une quantité intégrée sur un volume de contrôle fixe (ici Ω). Remarquons toutefois qu'en toute rigueur il s'agit d'une dérivée ordinaire d'une fonction d'une seule variable (t), la notation $\frac{\partial F_{\Omega}}{\partial t}$ serait donc mathématiquement plus rigoureuse. On réservera toutefois cette notation à la dérivée d'une quantité intégrale sur un volume matériel (ici $\mathcal{D}$).

Théorème du transport

Démonstration (i) :



$$\begin{aligned}
 \dot{F} &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} f dV = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \left[\int_{\mathcal{D}(t+dt)} f(\vec{x}, t+dt) dV - \int_{\mathcal{D}(t)} f(\vec{x}, t) dV \right] \\
 \int_{\mathcal{D}(t+dt)} f(\vec{x}, t+dt) dV &= \int_{\mathcal{D}(t)} \left[f(\vec{x}, t) + dt \frac{\partial f}{\partial t} \mathcal{O}(dt^2) \right] dV \\
 &\quad + \int_{\mathcal{D}^+} [f(\vec{x}, t) + \mathcal{O}(dt)] dV^+ - \int_{\mathcal{D}^-} [f(\vec{x}, t) + \mathcal{O}(dt)] dV^- \\
 dV^+ &= +\vec{n} \cdot (\vec{u} dt) dS; \quad dV^- = -\vec{n} \cdot (\vec{u} dt) dS \\
 \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} f dV &= \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \oint_{\partial \Omega} f \vec{u} \cdot \vec{n} dS
 \end{aligned}$$

Théorème du transport

Démonstration (ii) en 1D :

En considérant le domaine $\mathcal{D}(t)$ correspondant à l'intervalle $[a(t), b(t)]$, coïncidant avec le domaine de contrôle $\Omega = [a, b]$ à l'instant t :

$$\dot{F} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} f dx = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \left[\int_{a+da}^{b+db} f(x, t+dt) dx - \int_a^b f(x, t) dx \right]$$

$$\int_{a+da}^{b+db} f(x, t+dt) dx = \int_a^b \left[f(x, t) + dt \frac{\partial f}{\partial t} \right] dx + f(b)db - f(a)da$$

On aboutit ainsi à la version 1D du théorème de transport :

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t} dx + \left[\frac{db}{dt} f(b) - \frac{da}{dt} f(a) \right]$$

Théorème de la divergence

Un outil mathématique très utile dans la suite est le théorème de la divergence, qui permet de transformer des intégrales sur une surface fermée en intégrales sur un volume.

Théorème de la divergence :

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{A}) dV \quad (1)$$

Cette identité reste vraie pour tenseur, en remplaçant $\vec{A}$ par $\vec{\vec{A}}$ et $\operatorname{div}(\vec{A})$ par $\vec{\operatorname{div}}(\vec{\vec{A}})$.

Il existe également d'autres versions de cette identité, parfois appelées "Formules de Green-Ostrogradsky", etc... (cf. Formulaire, section E.3).

Toutes se déduisent des deux expressions données ici

(Démonstration : MMC2, notation indicielle).

"Lemme de localisation"

Pour finir, pour passer des formes globales aux formes locales, on aura besoin de faire appel au "Lemme de localisation" :

Théorème : Si $f(\vec{x})$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^3$ et si

$$\forall \Omega \in \mathbb{R}^3, \quad \int_{\Omega} f(\vec{x}) dV = 0,$$

alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, f(\vec{x}) = 0.$$

Démonstration : Résonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe un point $\vec{x}_0$ tel que $f(\vec{x}_0) \neq 0$. Par exemple $f(\vec{x}_0) > 0$. Alors la fonction f étant continue, il existe un voisinage Ω_0 du point $\vec{x}_0$ sur lequel f est positive, et donc $\int_{\Omega_0} f(\vec{x}) dV > 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse de départ.

Principe d'établissement des bilans

Nous disposons maintenant d'outils mathématiques permettant d'écrire de manière rigoureuse les **équations-bilan intégrales** des quantités importantes pour la mécanique des fluides.

En mécanique Newtonienne (c.a.d en négligeant les effets relativistes), les quantités conservatives (c.a.d. conservées pour un système isolé selon définition rappelée plus haut) sont au nombre de 3 :

- La masse,
- La quantité de mouvement,
- L'énergie.

Ces **équations-bilan intégrales** permettront également de déduire des **équations-bilan locales** pour ces mêmes quantités (on retrouvera ainsi des choses déjà vues en MMC et au chapitre 4.)

Les principales formes de ces équations sont résumées dans le document [Formulaire de mécanique des fluides](#), et leur établissement est détaillé dans la suite de ce chapitre.

NB En plus de ces quantités fondamentales, il sera également utile d'écrire des équations-bilan pour les quantités non-conservatives suivantes :

- Le volume,
- L'énergie cinétique,
- L'énergie interne,
- L'entropie.

Bilan de volume

Commençons par appliquer la démarche au volume d'un système matériel $\mathcal{D}(t)$, **qui n'est pas une quantité conservative**, mais va nous permettre d'établir une relation utile par la suite.

Quantité physique : **volume** V associée à la grandeur intensive $f = 1$.

Pour un volume matériel $\mathcal{D}(t)$ donné

$$V_{\mathcal{D}}(t) = \int_{\mathcal{D}(t)} [1] dV$$

Le théorème de transport conduit alors à :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} [1] dV = \int_{\Omega} \frac{\partial [1]}{\partial t} dV + \oint_{\partial\Omega} [1] \vec{u} \cdot \vec{n} dS$$

C'est à dire :

$$\frac{dV_{\mathcal{D}}}{dt} = \oint_{\partial\Omega} \vec{u} \cdot \vec{n} dS$$

Remarque : Le théorème de la divergence permet d'écrire cette relation sous une seconde forme :

$$\frac{dV_{\mathcal{D}}}{dt} = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{u}) dV$$

Ceci permet d'interpréter la divergence de la vitesse comme le taux local de variation de volume d'un système matériel.

Bilan intégral de masse

Quantité physique : **masse** M associée à la grandeur intensive ρ (**masse volumique**).

Pour un volume matériel $\mathcal{D}(t)$ donné

$$M_{\mathcal{D}}(t) = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho(\vec{x}, t) dV$$

Pour ce système matériel, le principe de conservation de la masse $\frac{dM_{\mathcal{D}}}{dt} = 0$ s'écrit :

- Pour le volume matériel $\mathcal{D}(t)$ en suivant le fluide dans son mouvement :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho(\vec{x}, t) dV = 0 \quad (2)$$

- Pour le volume de contrôle fixe Ω :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho(\vec{x}, t) dV = - \oint_{\partial\Omega} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS \quad (3)$$

[Démonstration] : théorème de transport avec $f = \rho$

Bilan local de masse

A partir des bilans intégraux précédents, on déduit la forme locale du bilan de masse, également appelée équation de continuité :

- Première forme ("bilan local eulerien" ou forme conservative) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (4)$$

[Démonstrations :]

- ▶ (i) A partir du bilan intégral sur un volume de contrôle (Eq. 3), à l'aide du théorème de la divergence et du lemme de localisation.
- ▶ (ii) Directement par un bilan sur un volume élémentaire $\delta V = dx dy dz$.
- Seconde forme ("bilan local lagrangien")

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (5)$$

[Démonstrations :]

- ▶ (i) A partir du précédent utilisant la définition de la dérivée particulaire
- ▶ (ii) En variables lagrangiennes :
On écrit $\frac{d}{dt}(\delta m) = 0$ pour une particule fluide élémentaire de masse $\delta m = \rho \delta V$.
On développe : $\delta V \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{d\delta V}{dt} = 0$
On reconnaît : $\frac{1}{\delta V} \frac{d\delta V}{dt} = \operatorname{div}(\vec{u})$ (cf. chap. 7 et cours MMC).

Bilan intégral de quantité de mouvement

Quantité physique : quantité de mouvement $\vec{Q}$ associée à la grandeur intensive $(\rho \vec{u})$.

Pour un volume matériel $\mathcal{D}(t)$ donné : $\vec{Q}_{\mathcal{D}}(t) = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho(\vec{x}, t) \vec{u}(\vec{x}, t) dV$

Principe de conservation de la quantité de mouvement : $\frac{d\vec{Q}_{\mathcal{D}}}{dt} = \vec{F}_{ext \rightarrow \mathcal{D}}$

- pour le volume matériel $\mathcal{D}(t)$ en suivant le fluide dans son mouvement ("bilan intégral lagrangien")

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \vec{u} dV = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \vec{g} dV + \oint_{\partial \mathcal{D}(t)} (-p \vec{n} + \vec{\tau} \cdot \vec{n}) dS \quad (6)$$

où $\vec{g}$ désigne la gravité (ou toute force à distance par unité de masse) et où les forces surfaciques sont la pression (normale) et la contrainte visqueuse (représentée par le tenseur $\vec{\tau}$).

- Pour le volume de contrôle fixe Ω ("bilan intégral eulérien")

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{u} dV = \int_{\Omega} \rho \vec{g} dV + \oint_{\partial \Omega} (-p \vec{n} + \vec{\tau} \cdot \vec{n}) dS - \oint_{\partial \Omega} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS \quad (7)$$

[Démonstration] : théorème de transport avec $\vec{f} = \rho \vec{u}$

Remarque : en présence d'interface traversant la frontière du volume considéré, il faut ajouter au membre de droite la contribution de la force de tension superficielle :

$$\int_{\mathcal{L}} \gamma \vec{n}_{\mathcal{L}} dl$$

(cf. formulaire, section C2).

Bilan local de quantité de mouvement

- Forme 1 ("forme conservative" ou "bilan local eulerien") :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) + \operatorname{div} (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) \right] = \rho \vec{g} - \operatorname{grad} p + \operatorname{div} (\vec{\tau}) \quad (8)$$

[Démonstration] : A partir du bilan intégral eulérien, à l'aide du théorème de la divergence.

- Forme 2 ("Bilan local lagrangien") :

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \vec{g} - \operatorname{grad} p + \operatorname{div} (\vec{\tau}) \quad (9)$$

[Démonstration] :

(i) A partir du bilan local eulerien (exercice),

(ii) A partir de l'équation de Cauchy établie par un bilan des forces appliqué à un volume élémentaire $\delta V = dx dy dz$ (exercice ; cf. cours MMC).

- Forme 3 : Pour un gaz newtonien

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \operatorname{grad}(\vec{u}) \cdot \vec{u} \right) = \rho \vec{g} - \operatorname{grad} p + \mu \Delta \vec{u} \quad (+ \mu \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{u}))) \quad (10)$$

[Démonstration] : à partir de la précédente (exercice).

Remarque : Le terme en gris correspond au cas "gaz newtonien" qui n'est pas justifié physiquement contrairement au cas des liquides. Un modèle plus rigoureux est le "gaz stokesien" qui conduit au même résultat mais avec un facteur 1/3 sur ce dernier terme (cf. formulaire). Cependant, ce terme est souvent simplement oublié dans les équations sans conséquence importante ; en effet il y a très peu de situations physiques où la compressibilité et la viscosité sont tous deux des mécanismes dominants.

Remarque : Gaz newtonien vs. gaz stokesien

Remarque sur la loi rhéologique :

Dans le cas général, les principes de symétrie de la MMC suggèrent une loi de comportement de la forme

$$\vec{\tau} = 2\mu\vec{D} + \lambda \operatorname{tr}(\vec{D})\vec{1} \quad \text{où } \lambda \text{ est la "seconde viscosité" .}$$

Ce qui peut également s'écrire :

$$\vec{\tau} = 2\mu\vec{D}' + \lambda' \operatorname{div}(\vec{u})\vec{1} \quad \text{où } \lambda' = \lambda + 2\mu/3 \text{ est la "viscosité dilatationnelle" .}$$

Le modèle du "gaz Stokesien" considère que la "viscosité dilatationnelle" est nulle, c.a.d. $\lambda' = 0$ et $\lambda = -2\mu/3$.

Dans ce cas, à l'aide du formulaire (Eqs. E.15, E.16 et E.4), la force visqueuse volumique s'écrit :

$$\operatorname{div}(\vec{\tau}) = \mu\Delta\vec{u} + \frac{\mu}{3}\operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{u}))$$

Le deuxième terme est nul dans le cas incompressible. Il est généralement négligé également dans le cas compressible. En effet en pratique il existe très peu de situations où la compressibilité et la viscosité sont toutes les deux des mécanismes dominants. On peut même montrer que si c'est le cas, c.a.d. si $Re = \mathcal{O}(1)$ et $M = \mathcal{O}(1)$ alors le nombre de Knudsen $Kn = Ma/Re$ est d'ordre 1, c.a.d. que l'approximation des milieux continus n'est pas valable !

Ce cas se rencontre par exemple dans des gaz raréfiés (lanceur spatial dans la très haute atmosphère). Dans de tels écoulements l'équation de Navier-Stokes n'est pas valable ; on peut en revanche utiliser des modélisations basées directement sur la théorie cinétique des gaz.

Bilan intégral d'énergie totale

Quantité physique : Energie totale $\mathcal{E}$ associée à la densité volumique $\rho(e + |\vec{u}|^2/2)$ où e est l'énergie interne massique et $|\vec{u}|^2/2$ l'énergie cinétique massique.

Pour un volume matériel $\mathcal{D}(t)$ donné : $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}(t) = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho(e + |\vec{u}|^2/2) dV$

- En écrivant un bilan d'énergie pour le volume matériel $\mathcal{D}(t)$, on obtient le "Premier principe de la thermodynamique en système fermé" :

$$\frac{d\mathcal{E}_{\mathcal{D}}}{dt} = \underbrace{\int_{\Omega} \rho \vec{g} \cdot \vec{u} dV}_{\dot{W}(g, ext)} + \underbrace{\oint_{\partial\Omega} -p \vec{n} \cdot \vec{u} dS}_{\dot{W}(p, ext)} + \underbrace{\oint_{\partial\Omega} \vec{u} \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{n}) dS}_{\dot{W}(v, ext)} - \underbrace{\oint_{\partial\Omega} \vec{q} \cdot \vec{n} dS}_{\dot{Q}} \quad (11)$$

$= -p \frac{dV_{\mathcal{D}}}{dt}$ si p uniforme

où $\vec{q}$ désigne le flux conductif de chaleur, donné par la loi de Fourier : $\vec{q} = -k \nabla T$.

- Pour un volume de contrôle fixe Ω on obtient le "Premier principe en système ouvert" :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \left(h + \frac{|\vec{u}|^2}{2} + \mathcal{U} \right) dV}_{\frac{d\mathcal{H}_{\Omega}}{dt}} = \underbrace{- \oint_{\partial\Omega} \rho \left(h + \frac{|\vec{u}|^2}{2} + \mathcal{U} \right) \vec{u} \cdot \vec{n} dS}_{\dot{\mathcal{H}}(ech)} \quad (12)$$

$$+ \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial t} dV}_{= V \frac{dp}{dt} \text{ si } p \text{ uniforme}} + \underbrace{\oint_{\partial\Omega} \vec{u} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} dS}_{\dot{W}(v, ext)} - \underbrace{\oint_{\partial\Omega} \vec{q} \cdot \vec{n} dS}_{\dot{Q}}$$

Où $h = e + p/\rho$ est l'**enthalpie massique** et $\mathcal{U}$ le potentiel gravitationnel tel que $\vec{g} = -g \vec{e}_d$ (en général $\vec{g} = -g \vec{e}$ donc $\mathcal{U} = gz + Cte$)

Bilans locaux d'énergie totale

Les bilans locaux s'obtiennent à partir des bilans intégraux en invoquant de nouveau le théorème de la divergence. Il existe un grand nombre de formes de ces relations, on retiendra les deux suivantes :

Forme locale 1 :

$$\rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) = \rho \vec{g} \cdot \vec{u} - \operatorname{div} (p\vec{u}) + \operatorname{div} (\vec{\tau} \cdot \vec{u}) - \operatorname{div} (\vec{q}) \quad (13)$$

Forme locale 2 :

$$\rho \frac{d}{dt} \left(h + \frac{|\vec{u}|^2}{2} + \mathcal{U} \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} (\vec{\tau} \cdot \vec{u}) - \operatorname{div} (\vec{q}). \quad (h = e + p/\rho) \quad (14)$$

(cf. cours de transferts thermiques et Chapitre 12)

Autres équations-bilan :

Le document **Formulaire de mécanique des fluides, annexe C** liste d'autres équations-bilans utiles en mécanique des fluides :

- Bilan local d'énergie cinétique.

(S'obtient à partir du bilan local de QDM en projetant sur $\vec{u}$)

Cf. chap. 9 : théorème de Bernoulli. Voir également MMC2, TD3!

- Bilans d'énergie interne massique e

(S'obtiennent en combinant les bilans d'énergie totale et d'énergie cinétique)

- Bilans d'entropie massique s

Le bilan local (Formulaire, sec. C.6, Eq. 15) S'obtient à partir du précédent avec l'identité $de = Tds - pd(\rho^{-1})$.

En intégrant sur un volume Ω on obtient le bilan intégral :

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho s \, dV}_{\frac{dS}{dt}} = \underbrace{- \oint_{\partial\Omega} \rho s \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS}_{\dot{S}(ech)} + \underbrace{\int_{\Omega} \left(\frac{2\mu}{T} [\vec{D}' : \vec{D}'] + \frac{k}{T^2} |\text{grad} T|^2 \right) dV}_{\dot{S}(cree)} - \underbrace{\oint_{\partial\Omega} \frac{\vec{q}}{T} \cdot \vec{n} \, dS}_{\dot{S}(recu)} \quad (15)$$

On reconnaît le **second principe en système ouvert**. Le formalisme MMC permet donc d'obtenir une formule pour l'entropie créée, qui est bien positive (si $\mu > 0$ et $k > 0$).

Identification du régime d'écoulement basé sur l'analyse dimensionnelle

Comme déjà vu au chapitre 5 :

- L'identification du terme dominant dans l'équation de Navier-Stokes permet d'identifier le régime d'écoulement.
- L'analyse dimensionnelle permet de préciser, en se basant sur des nombres sans dimensions, sous quels hypothèses chacun des régimes d'écoulement est justifié et comment les équations se simplifient dans ce régime.
- Le principe de moindre dégénérescence permet de déduire l'ordre de grandeur des termes indéterminés.

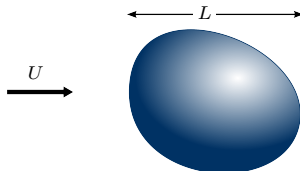
$$\underbrace{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}}_{\text{(désignation : } \mathcal{I} \text{)}} + \underbrace{\vec{grad}(\vec{u}) \cdot \vec{u}}_{\mathcal{C}} = \underbrace{\vec{g}}_{\mathcal{G}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \vec{g} \text{rad} p}_{\mathcal{P}} + \underbrace{\nu \Delta \vec{u}}_{\mathcal{V}}$$

Les principaux régimes vus dans ce cours sont :

- (i) Le terme $\mathcal{G}$ est dominant.
 $\implies$ Régime hydrostatique (cf. Chapitre 2).
- (ii) Le terme $\mathcal{V}$ est dominant.
 $\implies$ Régime de Stokes (cf. Chapitre 5).
- (iii) Le terme $\mathcal{I}$ est dominant.
 $\implies$ Régime acoustique (cf. Chapitre 11).
- (iv) Le terme $\mathcal{C}$ est dominant.
 $\implies$ C'est le **régime inertiel**, qui sera l'objet des chapitres 9 et 10.

Analyse dimensionnelle de l'équation de Navier-Stokes

Reprenons l'analyse dimensionnelle en considérant toujours un écoulement de vitesse incidente U autour d'un obstacle de taille caractéristique L .



Ordres de grandeurs :

$$|\vec{u}| = \mathcal{O}(U)$$

$$p = \mathcal{O}(p_0)$$

$$p' = (p - p_0) = \mathcal{O}(p_1)$$

$$(x, y, z) = \mathcal{O}(L)$$

$$t = \mathcal{O}(T)$$

U : échelle caractéristique (ou jauge) de vitesse

p_0 : échelle caractéristique de pression

p_1 : jauge des variations de pression

L : échelle caractéristique de longueur

T : de temps

(supposé connu)

(supposé connu)

(inconnu)

(connu, fixée par la géométrie)

(connu, inconnu, ou non pertinent)²

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\text{grad}}(\vec{u}) \cdot \vec{u} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} p + \nu \Delta \vec{u}$$

(désignation :)

(Ordre de grandeur :)

$$\mathcal{I} \quad [\mathcal{I}] = \frac{U}{T}$$

$$\mathcal{C} \quad [\mathcal{C}] = \frac{U}{L} \times U$$

$$\mathcal{G} \quad [\mathcal{G}] = g$$

$$\mathcal{P} \quad [\mathcal{P}] = \frac{p_1}{\rho_0 L}$$

$$\mathcal{V} \quad [\mathcal{V}] = \nu \frac{U}{L^2}$$

2. T est connu si une échelle de temps est imposée par les conditions limites (paroi oscillante avec période T par exemple); inconnu si une oscillation spontanée est observée; non pertinent si l'écoulement est stationnaire

Analyse dimensionnelle de l'équation de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\text{grad}}(\vec{u}) \cdot \vec{u} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} p + \nu \Delta \vec{u}$$

(désignation :)

$$\mathcal{I} \quad [\mathcal{I}] = \frac{U}{T}$$

$$\mathcal{C} \quad [\mathcal{C}] = \frac{U}{L} \times U$$

$$\mathcal{G} \quad [\mathcal{G}] = g$$

$$\mathcal{P} \quad [\mathcal{P}] = \frac{p_1}{\rho_0 L}$$

$$\mathcal{V} \quad [\mathcal{V}] = \nu \frac{U}{L^2}$$

En comparant l'ordre de grandeur des différents termes on fait apparaître les nombres sans dimension suivants :

- $\frac{[\mathcal{C}]}{[\mathcal{V}]} = \frac{UL}{\nu} = Re$ Nombre de Reynolds
- $\left(\frac{[\mathcal{C}]}{[\mathcal{G}]} \right)^{1/2} = \frac{U}{\sqrt{gL}} = Fr$ Nombre Froude
- $\frac{[\mathcal{I}]}{[\mathcal{C}]} = \frac{L}{UT} = Sr$ Nombre de Strouhal

Analyse dimensionnelle de l'équation de Navier-Stokes

Le régime inertiel est donc justifié sous l'hypothèse suivante :

$$Re \gg 1$$

Sous cette hypothèses on peut (en première approximation) négliger le terme $\mathcal{V}$.

L'équation de Navier-Stokes se simplifie alors pour donner l'équation d'Euler :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}(\vec{u}) \cdot \vec{u} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{grad} p$$

Simplifications supplémentaires :

- Si $Fr \gg 1$, le terme $\mathcal{G}$ peut également être négligé.
On parle alors de régime inertiel, non-pesant.³
- Si $Sr \ll 1$, le terme $\mathcal{I}$ peut également être négligé.
On parle alors de régime inertiel, stationnaire (si $Sr = 0$) ou quasi-statique (si $Sr \ll 1$) .

Remarque sur le terme de pression :

L'échelle caractéristique (ou "jauge") de pression p_1 peut être déterminée en invoquant le principe de moindre dégénérescence :

$$[\mathcal{P}] = [\mathcal{C}] \implies p_1 = \rho_0 U^2$$

Cette jauge de pression est très différente de celle caractérisant le régime de Stokes ($Re \ll 1$), pour lequel on avait montré au chapitre 5 que $p_1 = \mu U / L$!

3. Remarque : si le fluide est homogène ($\rho = cte$), on peut aussi faire disparaître le terme gravité des équations en introduisant la pression étoilée; cf. chapitre 4. Ce changement de variable montre que l'écoulement est cinématiquement équivalent à un écoulement de fluide non pesant, et ceci quelque soit la valeur de Fr .

Analyse dimensionnelle de l'équation de continuité (pour les gaz)

Dans un liquide incompressible et indilatable, $\rho = \rho_0$, donc l'équation-bilan de masse se simplifie directement en $\text{div}(\vec{u}) = 0$ (cf. chapitre 4).

Considérons ici le cas d'un écoulement de gaz parfait et cherchons à simplifier l'équation de continuité par le principe de l'analyse dimensionnelle.

Ordres de grandeurs :

$$\begin{aligned} |\vec{u}| &= \mathcal{O}(U) \\ \rho &= \mathcal{O}(\rho_0) \\ \rho' &= (\rho - \rho_0) = \mathcal{O}(\rho_1) \\ (x, y, z) &= \mathcal{O}(L) \\ t &= \mathcal{O}(T) \end{aligned}$$

U :	échelle caractéristique (ou <u>jauge</u>) de vitesse	(fixé par les cond. lim.)
ρ_0 :	échelle caractéristique de masse volumique	(fixé)
ρ_1 :	.. <u>jauge des variations de</u> masse volumique	(inconnu)
L :	 échelle caractéristique de longueur	(fixée par la géométrie)
T :	 de temps	(fixé ou inconnu)

$$\begin{array}{llll} \frac{\partial \rho}{\partial t} & + & \vec{u} \cdot \vec{\text{grad}} \rho & + & \rho \text{div}(\vec{u}) & = & 0 \\ \text{(désignation :)} & & \mathcal{I} & & \mathcal{C} & & \mathcal{D} \\ \text{(Ordre de grandeur :)} & [\mathcal{I}] = \frac{\rho_1}{T} & [\mathcal{C}] = \frac{U \rho_1}{L} & & [\mathcal{D}] = \rho_0 [\text{div}(\vec{u})] \end{array}$$

NB : $\text{div}(\vec{u}) = \partial u_x / \partial x + \partial u_y / \partial y + \partial u_z / \partial z$ et l'ordre de grandeur de chacun de ces 3 termes est U/L . Cependant n'écrivons pas trop vite $[\mathcal{D}] = \rho_0 U/L$ car les 3 termes apparaissant dans la divergence peuvent se compenser !

Hypothèses supplémentaires :

- Ecoulement adiabatique (pas de flux de chaleur $\vec{q}$ au sein du fluide).

Les variations de p et ρ se font donc sans variation d'entropie.

$$p_1 \approx (\partial p / \partial \rho)_s \rho_1 \rightarrow \rho_1 = \frac{1}{c_0^2} p_1 \text{ avec } c_0 = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_s}$$

$$\text{- Régime inertiel : } P_1 = \rho_0 U^2 \rightarrow \rho_1 = \frac{\rho_0 U^2}{c_0^2} = \rho_0 M^2 \quad (M : \text{Nombre de Mach})$$

- Oublions le terme $\mathcal{I}$ qui n'est dominant que dans le régime acoustique (cf. chapitre 10).

le PMD indique alors que $[\mathcal{D}] = [\mathcal{C}]$

$$\rightarrow [\text{div}(\vec{u})] = U/L \times M^2.$$

Analyse dimensionnelle de l'équation de continuité (pour les gaz)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \frac{\partial \rho}{\partial t} & + & \vec{u} \cdot \vec{\text{grad}} \rho & + & \rho \text{div}(\vec{u}) & = 0 \\
 \text{(désignation :)} & \mathcal{I} & & \mathcal{C} & & \mathcal{D} & \\
 \text{(Ordre de grandeur :)} & [\mathcal{I}] = \frac{[\rho']}{T} & & [\mathcal{C}] = \frac{U \rho_1}{L} & & [\mathcal{D}] = \rho_0 [\text{div}(\vec{u})] &
 \end{array}$$

$$[\text{div}(\vec{u})] = U/L \times M^2$$

Deux régimes possibles :

Premier cas : Si $M \ll 1$, alors l'équation de continuité se simplifie en $\text{div}(\vec{u}) = 0$.

Dans ce cas, un gaz parfait s'écoule en conservant le volume des particules fluides.

On parle de **Régime d'écoulement inertiel incompressible**.

Dans ce régime, un gaz (compressible du point de vue thermodynamique) s'écoule de la même manière qu'un liquide (incompressible du point de vue thermodynamique).

Second cas : Si $M = \mathcal{O}(1)$ (a fortiori si $M \gg 1$), alors l'équation de continuité ne se simplifie pas.

On parle de **Régime d'écoulement inertiel compressible** (cf. chapitre 12).