

Mécanique des fluides



Allée de tourbillons de Von Karman
en aval d'un cylindre à $Re = 140$ (lignes d'émission).



Allée de tourbillons de Von Karman
dans le sillage de l'île de Guadalupe (océan Pacifique).

David FABRE

IMFT / UPS

Département de Mécanique

9. Écoulements inertiels

Sommaire

- L'approximation d'écoulement inertiel
 - Définitions
 - Exemples
- Le modèle de fluide parfait
 - Écoulement de fluide parfait
 - Les limites du modèle de fluide parfait
- Théorèmes locaux
 - Equation-bilan pour l'énergie cinétique
 - Premier théorème de Bernoulli
 - Equations d'Euler en coordonnées curvilignes
 - Applications de Bernoulli
- Théorèmes intégraux
 - Motivation
 - Théorème d'Euler
 - Applications

Questions de cours sur le chapitre 9

Questions de cours :

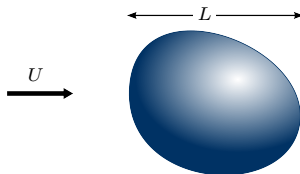
1. Que signifie l'approximation du "fluide parfait" et dans quelles circonstances est-elle justifiée ?
2. Etablir le bilan local d'énergie cinétique dans le cas général.
3. En déduire le premier théorème de Bernoulli. Précisez les hypothèses de validité de ce dernier et précisez à quel étape de la démonstration apparaissent chacune de celles-ci.
4. Qu'est ce que la "relation de Coanda" ? Expliquez en quelques mots le principe de sa démonstration. Quelles en sont les principales conséquences ?
5. Justifiez pourquoi, dans la zone de recirculation derrière un obstacle non profilé (cylindre par exemple), la pression est approximativement constante et égale à la pression "loin de l'objet".
6. Démontrez le théorème d'Euler.

Exercices de cours :

1. Expliquez le principe de fonctionnement d'un tube de pitot (avec une figure), et montrez que celui-ci permet, à partir d'une mesure de pression différentielle, de déduire la vitesse d'un écoulement.
2. Expliquez le principe de fonctionnement d'un tube de venturi (avec une figure), et montrez que celui-ci permet, à partir d'une mesure de hauteur d'eau dans des tubes, de déduire le débit massique d'un liquide dans une conduite.
3. Perte de charge singulière pour un élargissement brusque (exercice préparatoire 9.0)
4. Force exercée sur un auget (cf. TP).

Définitions

On appelle **écoulement inertiel** un écoulement caractérisé par un nombre de Reynolds $= \frac{UL}{\nu} \gg 1$.



Interprétation : si U et L désignent les échelles caractéristiques de vitesse et de longueur de l'écoulement,

$$Re = \frac{[C]}{[\nu]},$$

Le terme visqueux est donc négligeable devant le terme de convection (cf. chap. 8).

Autre interprétation (plus physique) :

$$Re = \frac{\tau_d}{\tau_a}$$

où $\tau_a = L/U$ est le **temps caractéristique d'advection**

et $\tau_d = L^2/\nu$ est le **temps de diffusion visqueuse** (cf. chapitre 4).

$Re \gg 1$ signifie donc que $\tau_d \gg \tau_a$: le temps caractéristique de diffusion visqueuse est très grand, la viscosité n'a donc "pas le temps" de jouer son rôle de diffusion et n'est donc pas le mécanisme dominant.

Exemples

Écoulements inertiels :

$$Re \equiv \frac{UL}{\nu} \gg 1$$

- Tache rouge de Jupiter :
 $U \sim 100 \text{ m/s}$ (360 km/h), $L \sim 15000 \text{ km}$, $\nu \sim 15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (cf. air) $\Rightarrow Re \sim 10^{14}$
- Cyclone :
 $U \sim 45 \text{ m/s}$ (170 km/h), $L \sim 100 \text{ km}$, $\nu \sim 15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \Rightarrow Re \sim 3 \times 10^{11}$
- Avion :
 $U \sim 100 \text{ m/s}$ (360 km/h), $L \sim 15 \text{ m}$, $\nu \sim 15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \Rightarrow Re \sim 10^8$
- Bateau :
 $U \sim 10 \text{ m/s}$ (20 noeuds, 36 km/h), $L \sim 10 \text{ m}$, $\nu \sim 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \Rightarrow Re \sim 10^8$
- Nageur :
 $U \sim 1 \text{ m/s}$, $L \sim 2 \text{ m}$, $\nu \sim 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \Rightarrow Re \sim 2 \times 10^6$
- Ballon de foot :
 $U \sim 30 \text{ m/s}$ (100 km/h), $L \sim 0.2 \text{ m}$, $\nu \sim 15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \Rightarrow Re \sim 4 \times 10^5$
- Robinet :
 $U \sim 50 \text{ cm/s}$, $L \sim 2 \text{ cm}$, $\nu \sim 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \Rightarrow Re \sim 10^4$

Écoulement de fluide parfait

On a vu (chapitre 8) que si $Re \gg 1$, le terme visqueux peut être négligé dans l'équation de Navier-Stokes, ce qui aboutit à l'équation d'Euler :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{\text{grad}} \vec{u} \right) \cdot \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} p + \vec{g} \quad \text{avec } \nu \Delta \vec{u} \text{ négligé}$$

L'équation d'Euler peut être interprétée comme l'équation du mouvement pour un fluide idéalisé, parfaitement non visqueux, (c'est-à-dire de viscosité nulle $\nu = 0$) appelé **fluide parfait**.

Les écoulements inertiels sont donc aussi parfois appelés **écoulements de fluide parfait** (écoulement d'un fluide hypothétique de viscosité nulle).

C'est un abus de langage, le "fluide parfait" n'existe pas (tous les fluides ayant une viscosité), a quelques exceptions exotiques près :

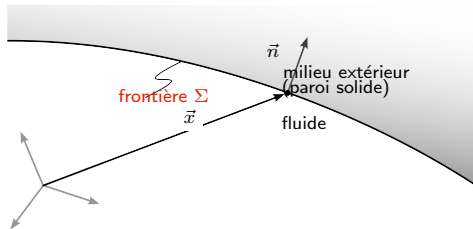
- Hélium liquide "superfluide" à $T < 4K$;
- Condensats de Bose-Einstein
- Plasmas de quarks et gluons (intérieur des étoiles à neutron...)

Propriétés de l'équation d'Euler

L'équation d'Euler n'est pas beaucoup plus facile à résoudre que celle de N-S, et pose quelques problèmes conceptuels...

- La recherche de solutions stationnaires n'a en général pas de solution unique (exemple : écoulements parallèles de la forme $u(y)$)
- Elle autorise des solutions discontinues (couches de cisaillement).
- Elle autorise le glissement le long d'une paroi.

Remarque : mathématiquement l'équation d'Euler est d'ordre 1 en espace et nécessite donc des conditions limites moins contraignantes que l'équation de Navier-Stokes :



fluide réel
(visqueux)
fluide parfait
(non visqueux)

continuité de la vitesse (condition d'adhérence)

$$\vec{u}(\vec{x} \in \Sigma, t) = \vec{u}_{\text{ext}}(\vec{x} \in \Sigma, t)$$

continuité de la vitesse **normale** (condition de glissement ou non-pénétration)

$$\vec{u}(\vec{x} \in \Sigma, t) \cdot \vec{n} = \vec{u}_{\text{ext}}(\vec{x} \in \Sigma, t) \cdot \vec{n}$$

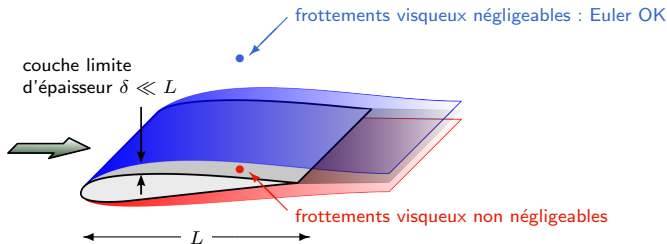
Limites du modèle de fluide parfait

Observations expérimentales : même à $Re \gg 1$, c'est-à-dire pour une viscosité aussi petite que l'on veut, on observe que **le fluide adhère à la paroi** ! (ou plus rigoureusement que la vitesse "au sens de la MMC" est nulle à la paroi ; cf. chapitre 3 pour une explication microscopique).

→ les conditions aux limites du fluide réel sont *incontournables*

Plus précisément, les observations expérimentales montrent que la condition limite d'adhérence est assurée à travers d'une couche très fine en proche paroi, en dehors de laquelle l'écoulement vérifie bien l'équation d'Euler, mais à travers laquelle les frottements visqueux ne sont plus négligeables.

Cette **couche limite** permet d'assurer l'adhérence.



Retenons donc que le modèle de Fluide parfait (et l'équation d'Euler) peuvent être utilisés :

- Pour les écoulements inertiels
- Sauf au voisinage immédiat des parois (et dans les régions turbulentes, cf chap. 6)

Equation pour l'énergie cinétique

Repartons de l'équation de Navier-Stokes pour un fluide homogène de masse volumique ρ soumis à une force extérieure volumique $\vec{g}$:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{\text{grad}} \vec{u}) \cdot \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} p + \vec{g} + \frac{d\vec{v}(\vec{r})}{\rho} \quad (1)$$

En notant et $u^2 = ||\vec{u}||^2$, utilisons l'égalité mathématique (eq. E10 du formulaire)

$$(\vec{\text{grad}} \vec{u}) \cdot \vec{u} = \text{rot}(\vec{u}) \wedge \vec{u} + \frac{1}{2} \vec{\text{grad}} u^2$$

En prenant le produit scalaire de l'eq. de Navier-Stokes avec $\vec{u}$, on obtient l'équation de bilan local pour l'énergie cinétique massique $e_k = \frac{1}{2} u^2$:

$$[\text{démonstration}] \rightarrow \frac{de_k}{dt} = \frac{\partial e_k}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\text{grad}}(e_k) = -\vec{u} \cdot \frac{\vec{\text{grad}} p}{\rho} + \vec{g} \cdot \vec{u} + \frac{\Pi_v}{\rho} \quad (2)$$

où $\Pi_v = d\vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{u}$ est la puissance volumique des efforts visqueux (et Π_v/ρ la puissance massique correspondante).

Si (a) le fluide est incompressible (ρ est uniforme), (b) l'écoulement est stationnaire ($\partial/\partial t = 0$), et (c) le champ de gravité est uniforme ($\vec{g} = -g\vec{e}_z$), alors on peut réécrire ce bilan en introduisant l'énergie mécanique massique : $e_m \equiv \frac{1}{2} u^2 + p/\rho + gz$:

$$[\text{Démonstration}] \rightarrow \frac{de_m}{dt} = \vec{u} \cdot \vec{\text{grad}}(e_m) = \frac{\Pi_v}{\rho} \quad (3)$$

Premier théorème de Bernoulli : conservation de l'énergie mécanique

On en déduit donc le **Premier théorème de Bernoulli** :

Hypothèses :

- (a) "Écoulement incompressible" (ou plus rigoureusement écoulement isovolume),
- (b) Écoulement stationnaire,
- (c) Force volumique $\vec{g} = -g\vec{z}$ uniforme,
- (d) "Fluide parfait" (ou plus rigoureusement forces visqueuses négligeables),

Alors la quantité $e_m \equiv p/\rho + gz + \frac{1}{2}u^2$ se conserve le long de chaque trajectoire (ou ligne de courant) (c.a.d. $\frac{de_m}{dt} = 0$).

On note aussi (en notation lagrangienne) :

$$e_m(t; \vec{X}_0) = e_m(\vec{X}_0), \text{ où } \vec{X}_0 \text{ est l'origine de chaque trajectoire lagrangienne.}$$

Remarques

- Dans le cas des gaz on néglige habituellement l'énergie potentielle de gravité.
Le théorème de Bernoulli s'écrit alors : $p + \frac{1}{2}\rho u^2 \equiv p_A = C^{te}$.
 p_A est appelée la pression de stagnation ou pression d'arrêt.
- Dans le cas des liquides, e_m est aussi couramment appelée la charge hydraulique.
- Si l'hypothèse (c) est remplacée par (c') : les forces volumiques sont conservatives, c.a.d. il existe une fonction "potentiel gravitationnel" $\mathcal{U}$ telle que $\vec{g} = -g\vec{\text{rad}}\mathcal{U}$, alors le théorème se généralise en : $p + \rho\mathcal{U} + \frac{1}{2}\rho u^2 = f(\vec{X}_0)$.
- Il existe une généralisation si l'hypothèse (a) est remplacée par (a') : Fluide Barotrope, c.a.d. $\rho = \rho(P)$ (cf. formulaire C.3, démo en exercice).

Equations intrinsèques

On va maintenant redémontrer ce théorème (ainsi qu'une seconde relation très utile) avec une méthode différente.

Hypothèses pour ce paragraphe :

- Écoulement stationnaire
- Régime d'écoulement incompressible
- Régime d'écoulement inertiel
- (Pour simplifier la démonstration) supposons que la gravité peut être négligée ($Fr \gg 1$).

En notant s l'abscisse curviligne le long d'une trajectoire (= une ligne de courant), R , $\vec{t}$ et $\vec{n}$ respectivement le rayon de courbure, les vecteurs unitaires tangent et normal (repère de Frenet), on montre :

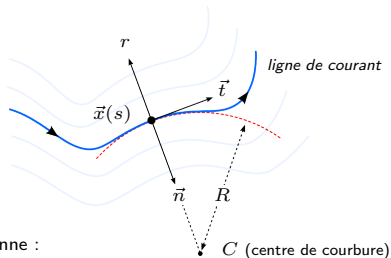
1/ En projection sur la tangente $\vec{t}$, l'équation d'Euler donne :

$$[\text{Démonstration}] \longrightarrow \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + p \right) = 0 \quad \text{"Premier théorème de Bernoulli".}$$

2/ En projection sur la normale $\vec{n}$, l'équation d'Euler donne

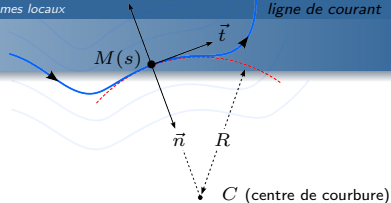
$$[\text{Démonstration}] \longrightarrow \vec{n} \cdot \nabla p = -\rho \frac{u^2}{R} \quad \text{ou encore} \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{u^2}{R} \quad \text{"Relation de Coanda".}$$

en notant r la coordonnée dans un repère cylindrique (défini localement) centré sur le centre de courbure C (c.a.d. centre du cercle osculateur à la trajectoire).



Equations en coordonnées curvilignes (suite)

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{u^2}{R} \quad \text{"Relation de Coanda".}$$



Corollaires :

- (a) Lorsque les lignes de courant sont courbées, la pression décroît en se rapprochant du centre de courbure. C'est l' "effet Coanda", qui fait par exemple que l'écoulement d'un filet d'eau rasant une cuiller est dévié vers celle-ci.
- (b) Dans des régions de l'écoulement où les lignes de courant sont rectilignes et parallèles ($R \rightarrow \infty$), alors la pression p est *constante le long des droites perpendiculaires aux lignes de courant*.
- (c) Dans des zones de l'écoulement où la vitesse est faible, la pression p est **uniforme**.

Conséquence importante : (de (b) et (c)) :

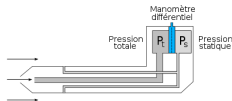
Dans les zones de recirculation couramment rencontrées dans le sillage d'objets non profilés, la pression est **uniforme** et approximativement égale à la pression "loin de l'objet".

Remarques :

- Si l'écoulement est à géométrie cylindrique, de la forme $\vec{u} = u_\theta(r)\vec{e}_\theta$, alors la relation de Coanda coïncide exactement avec la projection dans la direction radiale de l'équation d'Euler (cf. formulaire, section D.2).
- Si la gravité n'est pas négligeable, la relation de Coanda reste valable en remplaçant la pression p par la pression étoilée $p^* = p - (P_0 - \rho g z)$.
Dans la conséquence importante énoncée ci-dessus il suffit de remplacer "la pression est uniforme" par "la pression suit une loi hydrostatique".

Application classiques des théorèmes locaux

1. Tube de Pitot (ou Antenne de Prandtl)



2. Effet Venturi (TP)

3. Estimation de la traînée sur un cylindre, en présence de décollement.

Théorèmes intégraux : motivation

Problème générique : calcul de la force exercée par un fluide $\mathcal{F}$ sur une structure de surface Σ .

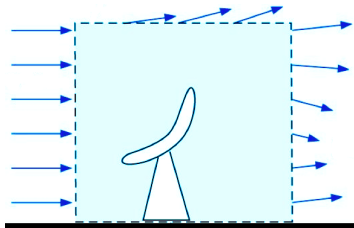
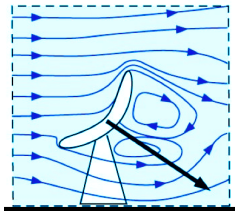
Méthode directe :

$$\vec{F}_{\mathcal{F} \rightarrow \Sigma} = \oint_{\Sigma} (p \vec{n}_{\mathcal{F} \rightarrow \Sigma} - \vec{\tau} \cdot \vec{n}_{\mathcal{F} \rightarrow \Sigma}) dS$$

Nécessite la connaissance du champ de pression et de contrainte visqueuse sur la surface...
pas toujours possible !

Alternative ?

→ Bilan intégral de quantité de mouvement dans un volume de contrôle bien choisi...



Théorème d'Euler

Rappel (chapitre 8) :

Soit Ω un volume de contrôle (fixe) dans le fluide. On note $\partial\Omega$ la frontière du volume de contrôle Ω , et $\vec{n}$ sa normale sortante.

Le bilan intégral de quantité de mouvement pour le fluide contenu dans Ω est donné par :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \vec{u} dV + \oint_{\partial\Omega} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = \oint_{\partial\Omega} (-p\vec{n} + \vec{\tau} \cdot \vec{n}) dS + \int_{\Omega} \rho \vec{g} dV \quad (4)$$

Supposons que l'écoulement est stationnaire et que la frontière $\partial\Omega$ est composée de deux parties :

- Une surface Σ qui est la paroi d'un solide sur lequel le fluide exerce une force $\vec{F}$ que l'on cherche à déterminer
(et sur laquelle la répartition de pression et de contrainte visqueuse ne sont pas connues).
- Une surface Γ sur laquelle on connaît (ou bien on peut modéliser) le champ de pression et de vitesse, et sur laquelle la contrainte visqueuse peut être négligée (c.a.d. Γ est dans une région de l'écoulement où l'approximation fluide parfait est justifiée)¹.

Alors le bilan de quantité de mouvement prend la forme suivante, appelée Théorème d'Euler :

$$\vec{F}_{\Omega \rightarrow \Sigma} = - \int_{\Gamma} [\rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) + p\vec{n}] dS + \int_{\Omega} \rho \vec{g} dV \quad (5)$$

Utilité : dans de nombreux cas il est possible de séparer Γ en plusieurs parties sur lesquelles p et $\vec{u}$ sont supposés uniformes (cf TD 7).

Remarque : l'analyse dimensionnelle permet de montrer que le dernier terme (poids du fluide) est négligeable sous la condition $Fr = U^2/gL \gg 1$ (nombre de Froude).

1. Il suffit en fait de supposer que la contrainte visqueuse normale $\vec{\tau} \cdot \vec{n}$ est négligeable sur Γ . La contrainte visqueuse tangentielle n'est pas toujours négligeable, par exemple dans une couche limite, mais celle-ci n'apparaît pas dans le bilan intégral.

Théorème d'Euler : Exemples d'applications

- Force exercée par l'écoulement dans une conduite coudée.
- Jet impactant sur un auget (TP) ou sur une plaque (TD 9.1)
- Détermination de la poussée d'un moteur de fusée (cf. chapitre 12).
- (...)