
Formulaire de mécanique des fluides

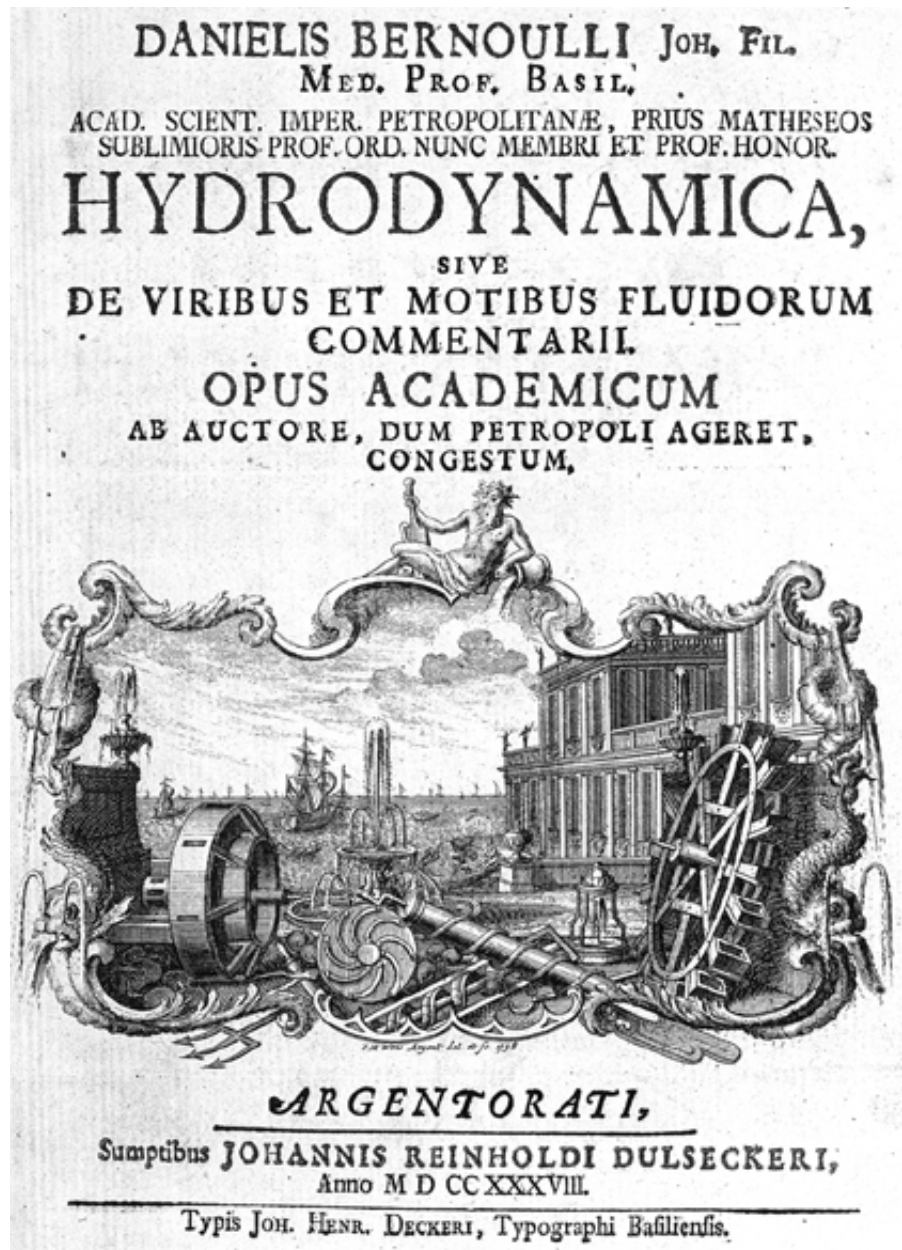


Table des matières

A Propriétés physiques des fluides les plus courants	2
empty	
A.1 Valeurs de référence pour l'eau et l'air	2
empty	
A.2 Equations d'état mécanique et énergétique de l'air	2
empty	
A.3 Equation d'état de l'eau salée (IES80)	2
empty	
A.4 Viscosité de l'eau et de l'air en fonction de la température	2
empty empty empty	
A.5 Vitesse du son	2
empty empty empty	
B Tableau des principaux nombres sans dimensions	3
empty	
C Equations-bilan sous formes locales et intégrales	4
empty	
C.1 Bilan de masse	4
empty	
C.2 Bilan de quantité de mouvement	4
empty empty	
C.3 Bilan d'énergie (1er principe)	4
empty empty empty	
C.4 Bilan d'énergie cinétique	5
empty empty empty	
C.5 Bilan d'énergie interne (hors programme L3)	5
empty	
C.6 Bilan d'entropie (hors programme L3)	5
empty empty	
D Opérateurs différentiels et équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible de fluide Newtonien dans les principaux systèmes de coordonnées	6
empty	
D.1 Coordonnées cartésiennes (x, y, z)	6
empty empty empty empty	
D.2 Coordonnées cylindriques (r, θ, z)	7
empty empty empty empty	
D.3 Coordonnées sphériques (R, Θ, ϕ) (ou (r, θ, φ) si pas d'ambiguïté)	8
empty empty empty empty	
E Quelques formules d'analyse vectorielle et tensorielle	9
empty	
E.1 Formules de dérivation d'un produit (généralisations de $(fg)' = f'g + fg'$) :	9
empty	
E.2 Formules de dérivée seconde (généralisations de $(f')' = f''$) :	9
empty	
E.3 Formules d'intégration (généralisations de $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$) :	9
empty	
F Quelques solutions exactes	10
empty	
G Pertes de charges	11
empty	
G.1 Pertes de charges régulières	11
empty	
G.2 Diagramme de Moody :	11
empty	
G.3 Pertes de charges singulières	11
empty	

H Lois de frottements sur une surface immergée dans un fluide	12
empty	
H.1 Frottement sur une plaque plane rectangulaire	12
empty	
H.2 Coefficients de frottement sur un objet profilé de forme quelconque	12
empty	
I. Ecoulement compressible isentropique de gaz parfait	12
empty	

A Propriétés physiques des fluides les plus courants

A.1 Valeurs de référence pour l'eau et l'air

(Dans les conditions normales de température et pression (CNTP) : $T = 20^\circ C = 293K$; $P = 10^5 Pa$)

	Air	Eau pure	Eau de mer
Masse volumique	$\rho = 1.205 kg/m^3$	$997,05 kg/m^3$	$\rho = 1027 kg/m^3$
Viscosité dyn.	$\mu = 1.81 \cdot 10^{-5} Pa \cdot s$	$\mu = 0.999 \cdot 10^{-3} Pa \cdot s$	
Viscosité cin.	$\nu = 1.5 \cdot 10^{-5} m^2/s$	$\nu = 1.002 \cdot 10^{-6} m^2/s$	$\nu = 1.139 \cdot 10^{-6} m^2/s$
Compressibilité	$\chi_s = 1.4 atm^{-1}$	$\chi_s = 4.9 \cdot 10^{-5} atm^{-1}$	
Dilatabilité	$\alpha = 3.4 \cdot 10^{-3} K^{-1}$	$\alpha = 1.5 \cdot 10^{-4} K^{-1}$	

A.2 Equations d'état mécanique et énergétique de l'air

$$P = \rho r T \quad (1)$$

$$e = c_v T; \quad h = c_p T; \quad c = \sqrt{\gamma r T}. \quad (2)$$

Avec : $r = 287 J/K/kg$; $\gamma = 1.405$, $c_v = \frac{r}{\gamma-1} = 709 J/K/kg$; $c_p = \frac{\gamma r}{\gamma-1} = 996 J/K/kg$

A.3 Equation d'état de l'eau salée (IES80)

La relation d'état IES80, utilisée par les océanographes, permet de calculer ρ (masse volumique en kg/m^3) en fonction de T (température en $^\circ C$), S (salinité en g/kg), et P (pression en $Bars$).

Elle est valide dans la gamme de paramètres $-2^\circ C < T < 40^\circ C$, $0 < S < 40 g/kg$, $0 < P < 1500 Bars$.

$$\rho(T, S, P) = \rho_0(T, S) \left/ \left(1 - \frac{P}{K(T, S, P)} \right) \right., \quad (3)$$

avec :

$$\begin{aligned} \rho_0(T, S) &= 999.842594 + 6.793952 \cdot 10^{-2} \times T - 9.09529 \cdot 10^{-3} \times T^2 + 1.001685 \cdot 10^{-4} \times T^3 - 1.120083 \cdot 10^{-6} \times T^4 \\ &+ 6.536332 \cdot 10^{-9} \times T^5 + 8.24493 \cdot 10^{-1} \times S - 4.0899 \cdot 10^{-3} \times TS + 7.6438 \cdot 10^{-5} \times T^2 S \\ &- 8.2467 \cdot 10^{-7} \times T^3 S + 5.3875 \cdot 10^{-9} \times T^4 S - 5.72466 \cdot 10^{-3} \times S^{1.5} + 1.0227 \cdot 10^{-4} \times TS^{1.5} \\ &- 1.6546 \cdot 10^{-6} \times T^2 S^{1.5} + 4.8314 \cdot 10^{-4} \times S^2, \\ K(T, S, P) &= 19652.21 + 148.4206 \times T - 2.327105 \times T^2 + 1.360447 \cdot 10^{-2} \times T^3 - 5.155288 \cdot 10^{-5} \times T^4 \\ &+ 3.239908 \times P + 1.43713 \cdot 10^{-3} \times TP + 1.16092 \cdot 10^{-4} \times T^2 P - 5.77905 \cdot 10^{-7} \times T^3 P \\ &+ 8.50935 \cdot 10^{-5} \times P^2 - 6.12293 \cdot 10^{-6} \times TP^2 + 5.2787 \cdot 10^{-8} \times T^2 P^2 \\ &+ 54.6746 \times S - 0.603459 \times TS + 1.09987 \cdot 10^{-2} \times T^2 S \\ &- 6.1670 \cdot 10^{-5} \times T^3 S + 7.944 \cdot 10^{-2} \times S^{1.5} + 1.6483 \cdot 10^{-2} \times TS^{1.5} - 5.3009 \cdot 10^{-4} \times T^2 S^{1.5} \\ &+ 2.2838 \cdot 10^{-3} \times PS - 1.0981 \cdot 10^{-5} \times TPS - 1.6078 \cdot 10^{-6} \times T^2 PS \\ &+ 1.91075 \cdot 10^{-4} \times PS^{1.5} - 9.9348 \cdot 10^{-7} \times P^2 S + 2.0816 \cdot 10^{-8} \times TP^2 S \\ &+ 9.1697 \cdot 10^{-10} \times T^2 P^2 S. \end{aligned}$$

A.4 Viscosité de l'eau et de l'air en fonction de la température

Cas de l'air :

$$\text{Loi (empirique) de Sutherland : } \mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + S}{T + S} \quad (4)$$

Avec les paramètres : $\mu_0 = 1.716 \times 10^{-5} Pa \cdot s$, $T_0 = 273.15 K$, $S = 110.4 K$

Cas de l'eau pure :

$$\text{Loi (empirique) de Vogel : } \mu(T) = \mu_0 e^{\frac{B}{T-C}} \quad (5)$$

avec les paramètres : $\mu_0 = 0.0243 Pa \cdot s$, $B = 578.919 K$, $C = 137.54 K$

A.5 Vitesse du son

Cas de l'air : (gaz parfait polytropique) : $c = \sqrt{\gamma r T} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$. Valeur de référence CNTP : $c = 343 m/s$.

Cas de l'eau pure : $c = \frac{1}{\chi_s \rho}$ avec $\chi_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s$, Donc $c = 1500 m/s$.

B Tableau des principaux nombres sans dimensions

Nom	Définition	Signification	Autre interprétation	Utilité
Knudsen	$Kn = \frac{\ell}{L}$	$\frac{\text{échelle microscopique}}{\text{échelle macroscopique}}$		Validité de la MMC
Reynolds	$Re = \frac{UL}{\nu}$	$\frac{\text{Convection}}{\text{Frottement visqueux}}$	$\frac{\text{Temps caractéristique de convection}}{\text{Temps caractéristique de diffusion}}$	Général
Mach	$Ma = \frac{U}{c}$	$\frac{\text{Convection}}{\text{Compressibilité}}$	$\frac{\text{Vitesse de l'écoulement}}{\text{vitesse du son}}$	Aérodynamique
Froude	$Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}$	$\left(\frac{\text{accélération de l'écoulement}}{\text{accélération de gravité}} \right)^{1/2}$	$\frac{\text{Vitesse de l'écoulement}}{\text{Vitesse des ondes de gravité}}$	Hydrodynamique, écoulements à surface libre
Bond (ou Eötvös)	$Bo = \frac{\rho g L^2}{\gamma}$	$\frac{\text{Pesanteur}}{\text{Capillarité}}$	$\left(\frac{\text{Echelle de longueur du problème}}{\text{Longueur capillaire}} \right)^2$	Phénomènes capillaires
Stokes (ou Womersley)	$St = \frac{L^2}{\nu T} = \frac{f L^2}{\nu}$	$\frac{\text{Instationarité}}{\text{Frottement visqueux}}$	$\frac{\text{Temps caractéristique de diffusion visqueuse}}{\text{Période d'oscillation}}$	Écoulements visqueux instationnaires
Strouhal	$Sr = \frac{fL}{U} = \frac{L}{UT}$	$\frac{\text{Instationarité}}{\text{Convection}}$	$\frac{\text{Temps caractéristique de convection}}{\text{Période d'oscillation}}$	Écoulements inertiels instationnaires
Helmholtz	$H = \frac{L}{cT} = \frac{fL}{c}$	$\frac{\text{Echelle de longueur du problème}}{\text{longueur d'onde acoustique}}$	$\frac{\text{fréquence caractéristique}}{\text{fréquence acoustique}}$	Acoustique

C Equations-bilan sous formes locales et intégrales

Dans cette annexe on résume les équations-bilan de la mécanique des fluides sous forme *locale* (equations différentielles gouvernant l'évolution temporelle des quantités locales) et sous forme *intégrale* en considérant un volume de contrôle *Fixe* noté Ω de frontière $\partial\Omega$ ($\vec{n}$ étant la normale sortante).¹ On considère ici le cas général d'un fluide soumis à une force *massique* $\vec{g}$ (en général la pesanteur). La loi de comportement est dans le cas général (compressible) la loi de Stokes $\vec{\tau} = 2\mu\vec{D}'$ avec $\vec{D}' = (\vec{D} - \text{div}(\vec{u})\vec{I}/3)$, qui se réduit à la loi de Newton $\vec{\tau} = 2\mu\vec{D}$ dans le cas incompressible. On suppose la viscosité μ constante, ainsi que la conductivité thermique k . Il existe de nombreuses variantes de ces équations-bilan, on liste ici les plus utiles. Un grand nombre d'autres formes sont données dans le livre *Mécanique des Fluides*, Candel (*Dunod*).

C.1 Bilan de masse

$$\text{Forme locale 1 (non conservative) : } \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \vec{u} = 0 \quad (\text{C.1})$$

$$\text{Forme locale 2 (conservative) : } \frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{u}) = 0 \quad (\text{C.2})$$

$$\text{Forme intégrale : } \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho dV = - \oint_{\partial\Omega} \rho\vec{u} \cdot \vec{n} dS \quad (\text{C.3})$$

C.2 Bilan de quantité de mouvement

$$\text{Forme locale 1 (non conservative)}^2 : \quad \rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho\vec{g} - \text{grad} p + \mu\Delta\vec{u} + \frac{\mu}{3} \text{grad}(\text{div } \vec{u}) \quad (\text{C.4})$$

$$\text{Forme locale 2 (conservative) : } \quad \frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{u} \otimes \vec{u}) = \rho\vec{g} - \text{grad} p + \text{div}(\vec{\tau}) \quad (\text{C.5})$$

Forme intégrale³

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho\vec{u} dV = - \oint_{\partial\Omega} \rho\vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS + \oint_{\partial\Omega} (-p\vec{n} + \vec{\tau} \cdot \vec{n}) dS + \int_{\Omega} \rho\vec{g} dV \quad \left[+ \oint_{\mathcal{L}} \gamma\vec{n}_{\mathcal{L}} d\ell \right] \quad (\text{C.6})$$

C.3 Bilan d'énergie (1er principe)

Dans ce paragraphe e est l'énergie interne *massique*, $h = e + p/\rho$ est l'enthalpie *massique*, $\mathcal{E}_{\mathcal{D}(t)}$ est l'énergie du *volume matériel* $\mathcal{D}(t)$ coïncidant avec Ω à l'instant t , $\mathcal{H}_{\Omega}$ est l'enthalpie totale du domaine *fixe* Ω , $\vec{q}$ est le flux de chaleur conductif, $\dot{W}^{(g,p,v,ext)}$ sont les puissances *mécaniques extérieures* des forces de gravité, pression et frottement visqueux, $\dot{Q}$ la puissance thermique, et $\dot{\mathcal{H}}^{(ech)}$ le flux convectif d'enthalpie.

Forme intégrale 1 (1er principe en système fermé)

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \left(e + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) dV + \oint_{\partial\Omega} \rho \left(e + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) \vec{u} \cdot \vec{n} dS}_{\frac{d\mathcal{E}_{\mathcal{D}(t)}}{dt}} = \underbrace{\int_{\Omega} \rho\vec{g} \cdot \vec{u} dV}_{\dot{W}^{(g,ext)}} + \underbrace{\oint_{\partial\Omega} -p\vec{u} \cdot \vec{n} dS}_{\dot{W}^{(p,ext)}} + \underbrace{\oint_{\partial\Omega} \vec{u} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} dS}_{\dot{W}^{(v,ext)}} - \underbrace{\oint_{\partial\Omega} \vec{q} \cdot \vec{n} dS}_{\dot{Q}} \quad (\text{C.7})$$

Forme intégrale 2 (1er principe en système ouvert) Le champ de force massique $\vec{g}$ est supposé conservatif, c.a.d. $\vec{g} = -\text{grad}\mathcal{U}$ (en général $\mathcal{U} = gz$).

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \left(h + \frac{|\vec{u}|^2}{2} + \mathcal{U} \right) dV}_{\frac{d\mathcal{H}_{\Omega}}{dt}} = \underbrace{- \oint_{\partial\Omega} \rho \left(h + \frac{|\vec{u}|^2}{2} + \mathcal{U} \right) \vec{u} \cdot \vec{n} dS}_{\dot{\mathcal{H}}^{(ech)}} + \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial t} dV}_{\text{„}V \frac{dP}{dt}\text{„}} + \underbrace{\oint_{\partial\Omega} \vec{u} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} dS}_{\dot{W}^{(v,ext)}} - \underbrace{\oint_{\partial\Omega} \vec{q} \cdot \vec{n} dS}_{\dot{Q}} \quad (\text{C.8})$$

1. Dans les bilans intégraux, selon une convention habituelle en MMC, on utilise la notation $\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} dV$ Pour désigner la dérivée temporelle d'une quantité intégrale sur un volume fixe, et la notation $\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} dV$ pour celle sur un volume matériel, bien qu'il s'agisse en toute rigueur dans les deux cas d'une fonction d'une seule variable t .

2. Le dernier terme n'est pertinent que pour un gaz Stokesien compressible, et est très souvent négligé

3. Le dernier terme entre crochets est à prendre en compte si le volume de contrôle Ω est traversé par une *surface libre* $\mathcal{S}$; dans ce cas $\mathcal{L} = \partial\Omega \cap \mathcal{S}$ et $\vec{n}_{\mathcal{L}}$ est le vecteur unitaire sortant tangent à $\mathcal{S}$ et perpendiculaire à $\mathcal{L}$

Remarque : si le volume de contrôle Ω contient une surface intérieure $\partial\Omega_i$ mobile, il convient d'ajouter à cette dernière expression la "puissance utile" définie par $\dot{W}^{(utile)} = \int_{\partial\Omega_i} \vec{u} \cdot (-p\vec{n} + \vec{\tau} \cdot \vec{n}) dS$.

$$\text{Forme locale 1 : } \rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) = \rho \vec{g} \cdot \vec{u} - \text{div}(p\vec{u}) + \text{div}(\vec{\tau} \cdot \vec{u}) - \text{div}(\vec{q}) \quad (\text{C.9})$$

$$\text{Forme locale 2 : } \rho \frac{d}{dt} \left(h + \frac{|\vec{u}|^2}{2} + \mathcal{U} \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(\vec{\tau} \cdot \vec{u}) - \text{div}(\vec{q}) \quad (\text{C.10})$$

C.4 Bilan d'énergie cinétique

La forme locale s'obtient en projetant le bilan de QDM sur $\vec{u}$.

$$\text{Forme locale 1 } \quad \rho \frac{d}{dt} \frac{|\vec{u}|^2}{2} = \rho \vec{g} \cdot \vec{u} - \text{grad} p \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \text{div}(\vec{\tau}) \quad (\text{C.11})$$

Forme locale 2 Sous les hypothèses suivantes :

- Le champ de force massique $\vec{g}$ est conservatif, c.a.d. $\vec{g} = -\text{grad}\mathcal{U}$ (en général $\mathcal{U} = gz$),
- L'écoulement est barotrope ($\rho = \rho(p)$, ce qui permet de définir la fonction $\mathcal{P} = \int \frac{dp}{\rho}$)⁴;

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{|\vec{u}|^2}{2} + \rho \vec{u} \cdot \text{grad} \left(\frac{|\vec{u}|^2}{2} + \mathcal{U} + \mathcal{P} \right) = \vec{u} \cdot \text{div}(\vec{\tau}) \quad (\text{C.12})$$

(on reconnaît comme cas particulier le premier théorème de Bernoulli).

Forme intégrale (cas $\vec{g}$ conservatif)

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \left(\frac{\rho |\vec{u}|^2}{2} + \rho \mathcal{U} \right) dV}_{\frac{dE_m}{dt}} = \underbrace{- \oint_{\partial\Omega} \left(\frac{\rho |\vec{u}|^2}{2} + \rho \mathcal{U} \right) \vec{u} \cdot \vec{n} dS}_{\dot{E}_m^{(ech)}} + \underbrace{\oint_{\partial\Omega} \vec{u} \cdot (-p\vec{n}) dS}_{\dot{W}^{(p,ext)}} + \underbrace{\int_{\Omega} p \text{div}(\vec{u}) dV}_{\dot{W}^{(p,int)}} + \underbrace{\int_{\Omega} \vec{u} \cdot \text{div}(\vec{\tau}) dV}_{\dot{W}^{(v)}} \quad (\text{C.13})$$

où $\dot{W}^{(v)}$ est la puissance des forces visqueuses, et $\dot{E}_m^{(ech)}$ le flux convectif d'énergie mécanique.

C.5 Bilan d'énergie interne (hors programme L3)

Le bilan local d'énergie interne massique s'obtient en combinant les deux précédents, et en utilisant les identités $\vec{u} \cdot \text{div}(\vec{\tau}) = \text{div}(\vec{\tau} \cdot \vec{u}) - \vec{\tau} : \text{grad}(\vec{u})$ et $p \text{div}(\vec{u}) = \text{div}(p\vec{u}) - \text{grad}(p) \cdot \vec{u}$ ce qui permet de faire apparaître les *puissances mécaniques intérieures* $\dot{W}^{(v,int)}$ et $\dot{W}^{(p,int)}$ ($\dot{W}^{(v,int)}$ est négatif, ce qui signifie que ce terme contribue positivement au bilan d'énergie interne et négativement au bilan d'énergie cinétique).

$$\text{Forme locale : } \rho \frac{de}{dt} = \vec{\tau} : \vec{\text{grad}}(\vec{u}) + p \text{div}(\vec{u}) - \text{div}(\vec{q}) \quad (\text{C.14})$$

$$\text{Forme intégrale : } \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho e dV}_{\frac{dE}{dt}} = \underbrace{- \oint_{\partial\Omega} \rho e \vec{u} \cdot \vec{n} dS}_{\dot{E}^{(ech)}} + \underbrace{- \int_{\Omega} p \text{div}(\vec{u}) dV}_{(-\dot{W}^{(p,int)})} + \underbrace{\int_{\Omega} \vec{\tau} : \vec{\text{grad}}(\vec{u}) dV}_{(-\dot{W}^{(v,int)})} + \underbrace{- \oint_{\partial\Omega} \vec{q} \cdot \vec{n} dS}_{\dot{Q}}$$

C.6 Bilan d'entropie (hors programme L3)

Le bilan local d'entropie *massique* s s'obtient à partir de celui de l'énergie interne : $de = Tds - pd(1/\rho)$.

$$\text{Forme locale : } \rho \frac{ds}{dt} = \frac{\vec{\tau} : \vec{\text{grad}}(\vec{u})}{T} - \frac{\text{div}(\vec{q})}{T} = \frac{2\mu \vec{D}' : \vec{D}'}{T} + k \frac{\text{grad} T \cdot \text{grad} T}{T^2} - \text{div} \left(\frac{\vec{q}}{T} \right) \quad (\text{C.15})$$

Forme intégrale (second principe en système ouvert)

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho s dV}_{\frac{dS}{dt}} = \underbrace{- \oint_{\partial\Omega} \rho s \vec{u} \cdot \vec{n} dS}_{\dot{S}^{(ech)}} + \underbrace{\int_{\Omega} \left(\frac{2\mu}{T} [\text{tr}(\vec{D}'^2)] + \frac{k}{T^2} |\text{grad} T|^2 \right) dV}_{\dot{S}^{(cree)}} + \underbrace{- \oint_{\partial\Omega} \frac{\vec{q}}{T} \cdot \vec{n} dS}_{\dot{S}^{(recu)}} \quad (\text{C.16})$$

4. Cette notion englobe fluide incompressible (avec $\mathcal{P} = p/\rho_0$) ainsi que le gaz parfait en évolution isotherme (avec $\mathcal{P} = rT_0 \log p$) ou isentropique (avec $\mathcal{P} = \gamma/(\gamma-1) \times (p_0/\rho_0) (p/p_0)^{(\gamma-1)/\gamma}$).

D Opérateurs différentiels et équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible de fluide Newtonien dans les principaux systèmes de coordonnées

D.1 Coordonnées cartésiennes (x, y, z)

Opérateurs différentiels

$$\vec{grad}(f) = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{cases} \quad \left(\text{Notation indicielle : } [\vec{grad}(f)]_i = f_{,i} \right)$$

$$\vec{rot}(\vec{u}) = \begin{cases} \omega_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \omega_y = \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \omega_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{cases} \quad \left([\vec{grad}(\omega)]_i = \epsilon_{ijk} u_{k,j} \right)$$

$$\text{div}(\vec{u}) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad \left(\text{div}(\vec{u}) = u_{i,i} \right)$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad \left(\Delta f = f_{,ii} \right)$$

$$\Delta \vec{u} = \begin{cases} \Delta u_x \\ \Delta u_y \\ \Delta u_z \end{cases} = \begin{cases} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \end{cases} \quad \left([\Delta \vec{u}]_i = u_{i,jj} \right)$$

$$\vec{\vec{grad}}(\vec{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \left([\vec{\vec{grad}}(\vec{u})]_{ij} = u_{i,j} \right)$$

$$\vec{div}(\vec{\vec{S}}) = \begin{cases} \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial S_{zx}}{\partial z} \\ \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{zy}}{\partial z} \\ \frac{\partial S_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} \end{cases} \quad \left([\vec{div}(\vec{\vec{S}})]_i = S_{ji,j} \right)$$

Equations de Navier-Stokes (écoulement incompressible, Newtonien)

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right)$$

Fonction de courant ψ pour un écoulement incompressible plan ($\vec{u} = u_x(x, y)\vec{e}_x + u_y(x, y)\vec{e}_y$)

$$\vec{u} = \vec{rot}(\psi(x, y)\vec{e}_z), \quad \text{c.a.d :} \quad \begin{cases} u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

D.2 Coordonnées cylindriques (r, θ, z)

Définition du changement de variables dans le cas d'un repère cylindrique d'axe polaire orienté selon z :

$$[x, y, z] = [r \cos \theta, r \sin \theta, z]$$

Opérateurs différentiels

$$\begin{aligned} \vec{\text{grad}}(f) &= \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{cases} & r\vec{\text{ot}}(\vec{u}) &= \begin{cases} \omega_r = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \\ \omega_\theta = \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ \omega_z = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta) - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \end{cases} \\ \text{div}(\vec{u}) &= \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r}}_{\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} & \Delta f &= \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right)}_{\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ \vec{\vec{\text{grad}}}(\vec{u}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} & \vec{\text{div}}(\vec{\vec{S}}) &= \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rS_{rr}) - \frac{S_{\theta\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial S_{zr}}{\partial z} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rS_{r\theta}) + \frac{S_{\theta r}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial S_{z\theta}}{\partial z} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rS_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} \end{cases} \\ \Delta \vec{u} &= \begin{cases} \Delta_r(\vec{u}) \\ \Delta_\theta(\vec{u}) \\ \Delta_z(\vec{u}) \end{cases} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \end{cases} = \begin{cases} \Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \\ \Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \\ \Delta u_z \end{cases} \end{aligned}$$

Equations de Navier-Stokes (écoulement incompressible, Newtonien)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} &= g_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \Delta_r(\vec{u}) \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} &= g_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \Delta_\theta(\vec{u}) \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta_z(\vec{u}) \end{aligned}$$

Fonction de courant ψ pour un écoulement incompressible plan exprimé en coordonnées polaires :

$$(\vec{u} = u_r(r, \theta) \vec{e}_r + u_\theta(r, \theta) \vec{e}_\theta)$$

$$\vec{u} = r\vec{\text{ot}}(\psi(r, \theta) \vec{e}_z), \quad \text{c.a.d :} \quad \begin{cases} u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \\ u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

Fonction de Stokes Ψ pour un écoulement incompressible à symétrie de révolution

$$(\vec{u} = u_r(r, z) \vec{e}_r + u_z(r, z) \vec{e}_z)$$

$$\vec{u} = r\vec{\text{ot}} \left(\frac{\Psi(r, z)}{r} \vec{e}_\theta \right), \quad \text{c.a.d :} \quad \begin{cases} u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \\ u_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

D.3 Coordonnées sphériques (R, Θ, ϕ) (ou (r, θ, φ) si pas d'ambigüité)

Définition du changement de variables dans le cas d'un repère sphérique d'axe polaire orienté selon z :

$$[x, y, z] = [R \sin \Theta \cos \phi, R \sin \Theta \sin \phi, R \cos \Theta]$$

Opérateurs différentiels

$$\begin{aligned} \vec{\text{grad}} f &= \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{cases} & r \vec{\text{ot}} \vec{u} &= \begin{cases} \omega_r = \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right) \\ \omega_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\varphi) \\ \omega_\varphi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \end{cases} \\ \text{div}(\vec{u}) &= \underbrace{\frac{\partial u_r}{\partial r} + 2 \frac{u_r}{r}}_{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r)} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{u_\theta}{r} \\ \Delta f &= \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right)}_{\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f)} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta}}_{\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \\ \vec{\text{grad}}(\vec{u}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - u_\varphi \right) \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{1}{\tan \theta} u_\varphi \right) \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\tan \theta} u_\theta + u_r \right) \end{bmatrix} \\ \vec{\text{div}}(\vec{S}) &= \begin{cases} \frac{\partial S_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r} S_{rr} + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{\theta r}}{\partial \theta} + \cot \theta \frac{S_{\theta r}}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial S_{\varphi r}}{\partial \varphi} - \frac{S_{\theta \theta}}{r} - \frac{S_{\varphi \varphi}}{r} \\ \frac{\partial S_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r} S_{r\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{\theta \theta}}{\partial \theta} + \cot \theta \frac{S_{\theta \theta}}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial S_{\varphi \theta}}{\partial \varphi} + \frac{S_{\theta r}}{r} - \cot \theta \frac{S_{\varphi \varphi}}{r} \\ \frac{\partial S_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2}{r} S_{r\varphi} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial S_{\theta \varphi}}{\partial \theta} + \cos \theta \frac{S_{\theta \varphi}}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial S_{\varphi \varphi}}{\partial \varphi} + \frac{S_{\varphi r}}{r} + \frac{S_{\varphi \theta}}{r} \end{cases} \\ \Delta \vec{u} &= \begin{cases} \Delta_r(\vec{u}) \\ \Delta_\theta(\vec{u}) \\ \Delta_\varphi(\vec{u}) \end{cases} = \begin{cases} \Delta u_r - \frac{2}{r^2} \left[u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{\tan \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] \\ \Delta u_\theta + \frac{1}{r^2} \left[2 \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} u_\theta - \frac{2 \cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] \\ \Delta u_\varphi + \frac{1}{r^2} \left[\frac{2}{\sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{\sin^2 \theta} u_\varphi + \frac{2 \cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right] \end{cases} \end{aligned}$$

Equation de Navier-Stokes (écoulement incompressible, Newtonien) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[\frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{\sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - u_\theta^2 - u_\varphi^2 \right] &= g_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \Delta_r(\vec{u}); \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[\frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{\sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + u_\theta u_\varphi - \frac{u_\varphi^2}{\tan \theta} + u_\varphi \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \frac{u_r u_\theta}{r} \right] &= g_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \Delta_\theta(\vec{u}); \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[u_\theta \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{\sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_\theta u_r - \frac{u_\theta u_\varphi}{\tan \theta} \right] &= g_\varphi - \frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \Delta_\varphi(\vec{u}) \end{aligned}$$

Fonction de Stokes Ψ

Pour un écoulement incompressible à symétrie de révolution décrit en coordonnées sphériques

$$(\vec{u} = u_R(R, \Theta) \vec{e}_R + u_\Theta(R, \Theta) \vec{e}_\Theta)$$

$$\vec{u} = r \vec{\text{ot}} \left(\frac{\Psi(R, \Theta)}{R \sin \Theta} \vec{e}_\varphi \right), \quad \text{c.a.d :} \quad \begin{cases} u_R &= -\frac{1}{R^2 \sin \Theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta}, \\ u_\Theta &= \frac{1}{R \sin \Theta} \frac{\partial \Psi}{\partial R}. \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

E Quelques formules d'analyse vectorielle et tensorielle

E.1 Formules de dérivation d'un produit (généralisations de $(fg)' = f'g + fg'$) :

$$\vec{grad}(fg) = f \vec{grad}(g) + g \vec{grad}(f) \quad (\text{E.1})$$

$$\vec{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{grad}(\vec{A}) \cdot \vec{B} + \vec{grad}(\vec{B}) \cdot \vec{A} + \vec{A} \wedge \vec{rot}(\vec{B}) + \vec{B} \wedge \vec{rot}(\vec{A}) \quad (\text{E.2})$$

$$\text{div}(f\vec{A}) = f \text{div}(\vec{A}) + \vec{A} \cdot \vec{grad}(f) \quad (\text{E.3})$$

$$\vec{\text{div}}(f\vec{A}) = f \vec{\text{div}}(\vec{A}) + {}^t \vec{A} \cdot \vec{grad}(f) \quad (\text{E.4})$$

$$\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \vec{rot}(\vec{A}) - \vec{A} \vec{rot}(\vec{B}) \quad (\text{E.5})$$

$$\vec{rot}(f\vec{A}) = f \vec{rot}(\vec{A}) + \vec{A} \wedge \vec{grad}(f) \quad (\text{E.6})$$

$$\vec{rot}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{grad}(\vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{grad}(\vec{B}) \cdot \vec{A} + \vec{A} \text{div}(\vec{B}) - \vec{B} \text{div}(\vec{A}) \quad (\text{E.7})$$

$$\vec{\text{div}}(\vec{B} \otimes \vec{A}) = \text{div}(\vec{B}) \vec{A} + \vec{grad}(\vec{A}) \cdot \vec{B} \quad (\text{E.8})$$

$$\text{div}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{\text{div}}(\vec{A}) \cdot \vec{B} + ({}^t \vec{A}) : \vec{grad}(\vec{B}) \quad (\text{E.9})$$

$$(\vec{u} \cdot \vec{grad}) \vec{u} = \vec{grad}(\vec{u}) \cdot \vec{u} = \vec{grad}(\|\vec{u}\|^2/2) + \vec{rot}(\vec{u}) \wedge \vec{u} \quad (\text{E.10})$$

E.2 Formules de dérivée seconde (généralisations de $(f')' = f''$) :

$$\text{div}(\vec{grad} f) = \Delta f \quad (\text{E.11})$$

$$\vec{rot}(\vec{grad} f) = \vec{0} \quad (\text{E.12})$$

$$\text{div}(\vec{rot} \vec{A}) = 0 \quad (\text{E.13})$$

$$\vec{rot}(\vec{rot} \vec{A}) = \vec{grad}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} \quad (\text{E.14})$$

$$\vec{\text{div}}(\vec{grad} \vec{A}) = \Delta \vec{A} \quad (\text{E.15})$$

$$\vec{\text{div}}({}^t \vec{grad} \vec{A}) = \vec{grad}(\text{div} \vec{A}) \quad (\text{E.16})$$

E.3 Formules d'intégration (généralisations de $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$) :

Pour un volume Ω bornée par une surface fermée Σ , en utilisant la convention de la normale sortante

$$\int_{\Omega} \text{div}(\vec{A}) dV = \oint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n} dS \quad (\text{E.17})$$

$$\int_{\Omega} \vec{\text{div}}(\vec{A}) dV = \oint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n} dS \quad (\text{E.18})$$

$$\int_{\Omega} \vec{grad}(f) dV = \oint_{\Sigma} f \vec{n} dS \quad (\text{E.19})$$

$$\int_{\Omega} \vec{rot}(\vec{A}) dV = \oint_{\Sigma} \vec{A} \wedge \vec{n} dS \quad (\text{E.20})$$

Pour une surface ouverte Σ (associée à un vecteur normal $\vec{n}$) bornée par un contour Γ (associé à un vecteur tangent $\vec{t}$) orienté positivement :

$$\int_{\Sigma} \vec{rot}(\vec{A}) \cdot \vec{n} dS = \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot \vec{t} d\ell \quad (\text{E.21})$$

F

(Quelques) solutions exactes des équations de Navier-Stokes

Schéma	Hypothèses	Solution	Nom de l'écoulement
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$	$\vec{u} = u(y) \vec{e}_x$ avec $u(y) = \frac{Uy}{h}$ $p = C^{te}$	Couette plan sans gradient de pression ($\partial p / \partial x = 0$)
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$	$\frac{dp}{dx} = C^{te}$ et $\vec{u} = u(y) \vec{e}_x$ avec $u(y) = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(h-y)$	Poiseuille plan
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$	$\frac{dp}{dx} = C^{te}$ et $\vec{u} = u(y) \vec{e}_x$ avec $u(y) = U \left[\frac{y}{h} - K \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h} \right) \right]$ où $K = \frac{h^2}{2\mu U} \frac{dp}{dx}$	Couette plan avec gradient de pression ($\partial p / \partial x \neq 0$) = "Couette-Poiseuille"
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} = \vec{0}$	$\frac{dp}{dx} = C^{te}$ et $\vec{u} = u(r) \vec{e}_x$ avec $u(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (R^2 - r^2)$	Poiseuille cylindrique
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} = \vec{0}$ $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$	$\vec{u} = v(r) \vec{e}_\theta$ avec $v(r) = Ar + \frac{B}{r}$ où $A = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$ et $B = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$	Couette cylindrique = "Couette-Taylor"
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$	$\vec{u} = u(y) \vec{e}_x$ avec $u(y) = \frac{g \sin \alpha}{2\nu} y(2h-y)$ $p(y) = \rho g(h-y) \cos \alpha + P_a$	Film tombant
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$ $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$	$\vec{u} = u(y, t) \vec{e}_x$ avec $u(y, t) = U \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{y}{\sqrt{2\nu t}} \right) \right]$ $\tau_p = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big _{y=0} = -\rho U \sqrt{\frac{\nu}{\pi t}}$	Premier problème de Stokes
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$ $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$	$\vec{u} = u(y, t) \vec{e}_x$ $u(y, t) = U e^{-y/\delta} \cos(\omega t - \frac{y}{\delta}); \delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$ $\tau_p = -\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big _{y=0} = -\frac{\mu U \sqrt{2}}{\delta} \cos(\omega t + \pi/4)$	Second problème de Stokes

G Pertes de charges

G.1 Pertes de charges régulières

Pour une canalisation de diamètre D uniforme, longueur L , rugosité k , la perte de charge entre l'entrée (1) et la sortie (2) est donnée par

$$\Delta_1^2 = (P_1 + \rho g z_1) - (P_2 + \rho g z_2) = \frac{\rho U^2}{2} \times \frac{L}{D} \times \lambda(Re, \epsilon) \quad \text{avec } Re = \frac{UD}{\nu}, \quad \text{et } \epsilon = \frac{k}{D}$$

— Dans le **Régime laminaire** ($Re < 2000$) on peut utiliser la formule de Poiseuille :

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

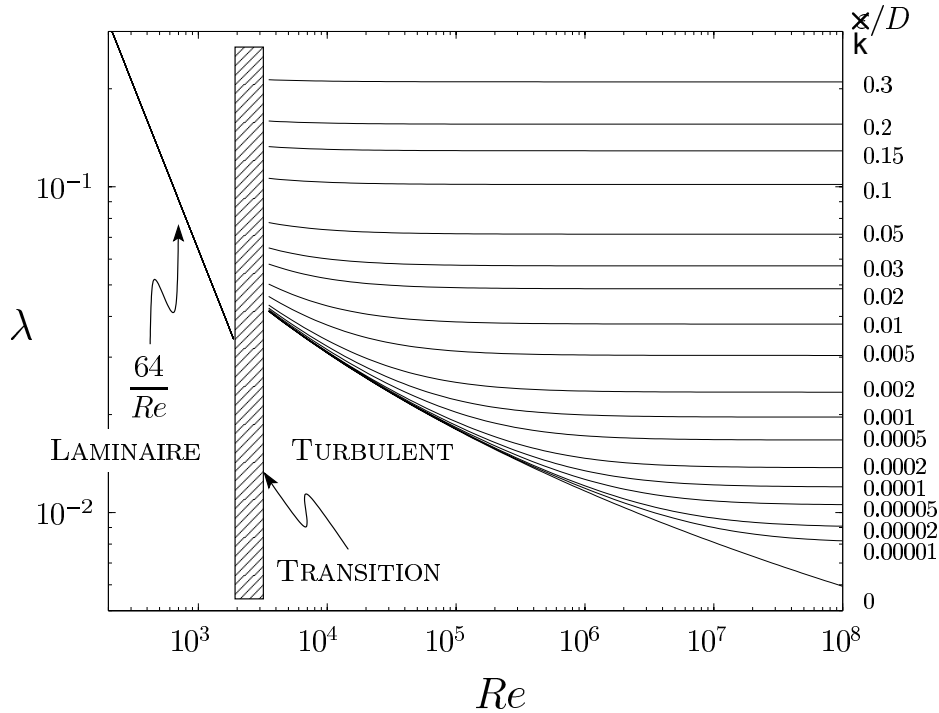
— Dans le **Régime turbulent hydrodynamiquement lisse** ($4 \times 10^3 < Re < 10^5$ et $\epsilon < 10^{-4}$) on peut utiliser la formule de Blasius :

$$\lambda = 0.316 Re^{-1/4} \quad (G.22)$$

— Dans le **Régime turbulent rugueux** ($Re > 4000$ et ϵ quelconque), on peut utiliser la formule de Colebrook (semi-explicite) :

$$\lambda = \frac{1}{\left(-2 \log_{10} \left[\frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{\epsilon}{3.71} \right]\right)^2} \quad (G.23)$$

G.2 Diagramme de Moody :



G.3 Pertes de charges singulières

Pour une singularité (variation brutale de la géométrie) dans une conduite, la perte de charge est donnée par

$$\Delta_1^2 = (P_1 + \rho U_1^2/2) - (P_2 + \rho U_2^2/2) = \frac{\rho U^2}{2} \times K$$

où K est le **coefficient de perte de charge singulière** qui dépend de Re et de la géométrie de la singularité. Pour $Re > 1000$ on observe que K ne dépend plus de Re , et seulement de la géométrie. Voici quelques valeurs pour différents types de singularités :

Raccord linéaire standard : $K = 0.04$.

Coude standard à 90° : $K = 0.75$.

Elargissement brusque : $K = (1 - S_1/S_2)^2$ (U est la vitesse en amont : $U = U_1$).

Entrée de canalisation brusque : $K = 1/2$. (U est la vitesse en aval : $U = U_2$).

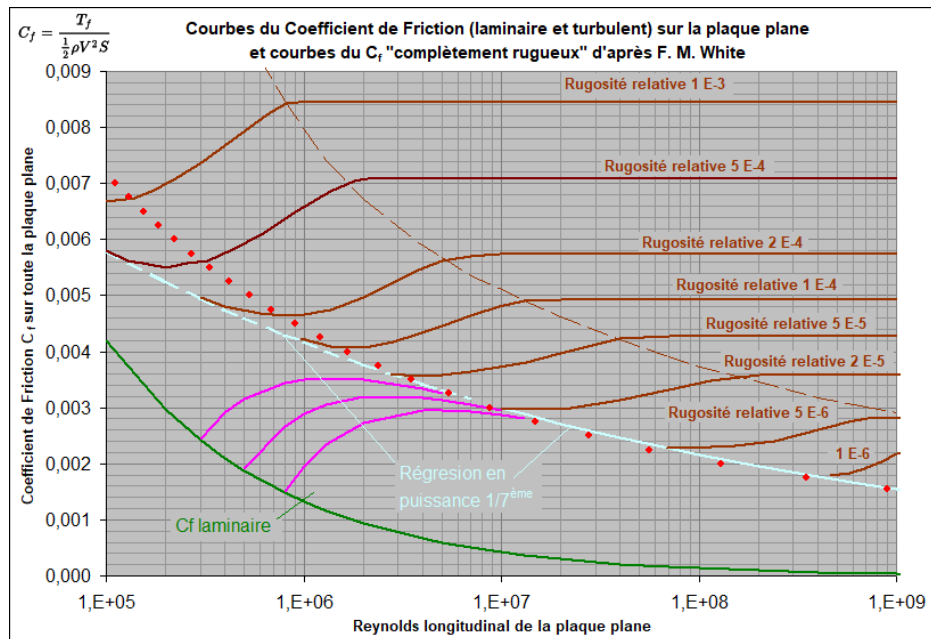
H Lois de frottements sur une surface immergée dans un fluide

H.1 Frottement sur une plaque plane rectangulaire

Considérons une plaque rectangulaire de longueur L largeur b , surface $S = Lb$ rugosité k . L'analyse dimensionnelle et des considérations géométriques (indépendance vis-à-vis de la largeur b de la plaque conduit à supposer une force de frottement de la forme :

$$T_f = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_f(Re, \epsilon) \quad \text{avec } Re = \frac{VL}{\nu} \text{ et } \epsilon = \frac{k}{L}.$$

Le coefficient de frottement a été tabulé par des séries d'expériences, dans le diagramme ci-dessous (source : WIKIPEDIA).



- Dans le **Régime laminaire** ($Re \leq 3 \cdot 10^5$ et $\epsilon \leq 5 \cdot 10^{-5}$), le coefficient de frottement est donné par la loi de Blasius :

$$C_f = 1.328 Re^{-1/2}$$

- Dans le **régime turbulent, hydrodynamiquement lisse** ($Re \geq 10^7$ et $\epsilon \leq 34.6 Re^{-.902}$), l'écoulement est dans le régime turbulent, lisse. Il existe différentes corrélations expérimentales. Retenon-en deux :
a/ Formule de Schlichting (points rouges sur la figure), utilisée en aérodynamique :

$$C_f = \frac{0.455}{(\log_{10} Re)^{2.58}}.$$

- b/ Formule de Hugues, utilisée en hydrodynamique navale :

$$C_f = \frac{0.067}{(\log_{10}(Re) - 2)^2}.$$

- Dans le **régime turbulent rugueux**, on se référera aux courbes marron sur la figure. Les paliers à grand Re (cas dominé par la rugosité) peuvent être approximés par la loi de McNerney :

$$C_f = 0.032 k^{1/5}$$

H.2 Coefficients de frottement sur un objet profilé de forme quelconque

Dans le cas d'un objet profilé (profil d'aile, ou carène de bateau), diverses méthodes ont été élaborées dans les communautés de l'ingénierie aérodynamique et de l'hydrodynamique navale pour estimer le coefficient de frottement. Retenons la *méthode du facteur de forme* qui consiste à supposer que le coefficient de traînée est de la forme

$$C_f = (1 + \kappa) C_{f,0}(Re, \epsilon)$$

où $C_{f,0}$ est la loi de frottement sur une paroi plane (donnée le diagramme et/ou l'une des lois de régression de la section précédente) et κ est un facteur de forme déterminé expérimentalement.

Ecoulement compressible isentropique de gaz parfait

Notations:

M	: Nombre de Mach
U	: Vitesse
P	: Pression
ρ	: Masse volumique
T	: Température absolue
A	: Aire d'une section droite
P_i	: Pression d'arrêt isentropique
ρ_i	: Masse volumique d'arrêt isentropique
T_i	: Température d'arrêt isentropique
A_c	: Aire de la section droite au col de la tuyère

Relations de St-Venant :

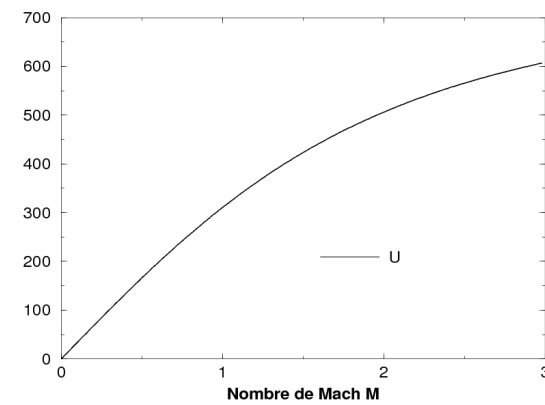
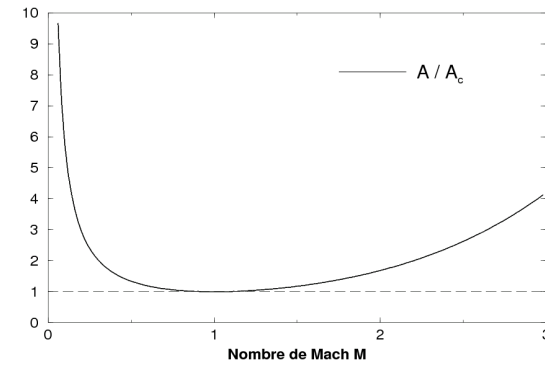
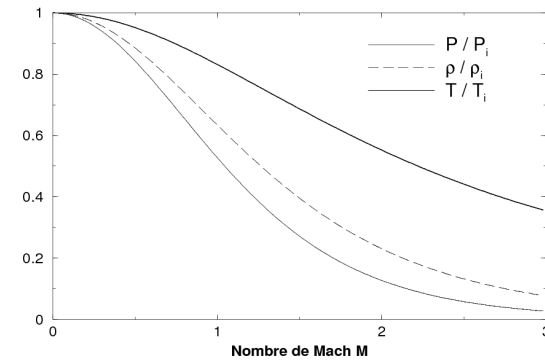
$$\frac{T}{T_i} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-1} \quad (1)$$

$$\frac{P}{P_i} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} \quad (2)$$

$$\frac{\rho}{\rho_i} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{-1}{\gamma-1}} \quad (3)$$

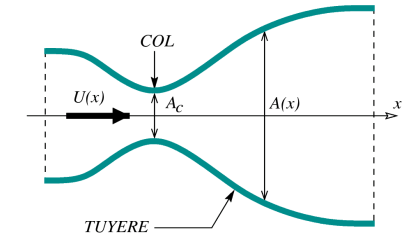
$$\text{Si } M_c = 1 : \frac{A}{A_c} = \frac{1}{M} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (4)$$

$$U = \left\{ \frac{2\gamma r}{\gamma-1} T_i \left[1 - \left(\frac{P}{P_i}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \right\}^{1/2} \quad (5)$$



Ecoulement isentropique
 $p/\rho^\gamma = Cte$
 de gaz parfait $p = \rho r T$

Données numériques:
 $\gamma = 1.405$, $T_i = 288K$



M	P/P_i	ρ/ρ_i	T/T_i	A/A_c	U^*
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	inf	0.00
0.02	0.9997	0.9998	0.9999	28.9262	6.81
0.04	0.9989	0.9992	0.9997	14.4735	13.63
0.06	0.9975	0.9982	0.9993	9.6606	20.44
0.08	0.9955	0.9968	0.9987	7.2577	27.25
0.10	0.9930	0.9950	0.9980	5.8187	34.04
0.12	0.9899	0.9928	0.9971	4.8617	40.83
0.14	0.9864	0.9903	0.9960	4.1802	47.61
0.16	0.9822	0.9873	0.9948	3.6708	54.38
0.18	0.9776	0.9840	0.9935	3.2762	61.14
0.20	0.9724	0.9803	0.9920	2.9620	67.88
0.22	0.9667	0.9762	0.9903	2.7063	74.61
0.24	0.9606	0.9718	0.9885	2.4944	81.31
0.26	0.9539	0.9670	0.9865	2.3162	88.00
0.28	0.9468	0.9619	0.9844	2.1646	94.67
0.30	0.9393	0.9564	0.9821	2.0342	101.32
0.32	0.9313	0.9506	0.9797	1.9210	107.94
0.34	0.9229	0.9445	0.9771	1.8221	114.53
0.36	0.9141	0.9380	0.9744	1.7351	121.10
0.38	0.9049	0.9313	0.9716	1.6581	127.64
0.40	0.8953	0.9243	0.9686	1.5895	134.16
0.42	0.8854	0.9170	0.9655	1.5284	140.64
0.44	0.8751	0.9094	0.9623	1.4735	147.09
0.46	0.8645	0.9016	0.9589	1.4242	153.51
0.48	0.8537	0.8935	0.9554	1.3797	159.89
0.50	0.8425	0.8852	0.9518	1.3395	166.23
0.52	0.8312	0.8767	0.9481	1.3030	172.55
0.54	0.8195	0.8679	0.9442	1.2700	178.82
0.56	0.8077	0.8590	0.9403	1.2400	185.05
0.58	0.7956	0.8498	0.9362	1.2127	191.25
0.60	0.7834	0.8405	0.9321	1.1880	197.40
0.62	0.7710	0.8310	0.9278	1.1654	203.51
0.64	0.7585	0.8214	0.9234	1.1449	209.58
0.66	0.7458	0.8116	0.9189	1.1264	215.61
0.68	0.7331	0.8017	0.9144	1.1095	221.59
0.70	0.7202	0.7917	0.9097	1.0942	227.53
0.72	0.7073	0.7815	0.9050	1.0804	233.42
0.74	0.6943	0.7713	0.9002	1.0680	239.26
0.76	0.6813	0.7610	0.8953	1.0569	245.06
0.78	0.6683	0.7506	0.8903	1.0470	250.81
0.80	0.6552	0.7402	0.8853	1.0382	256.51
0.82	0.6422	0.7296	0.8802	1.0304	262.16
0.84	0.6292	0.7191	0.8750	1.0237	267.76
0.86	0.6162	0.7085	0.8697	1.0178	273.32
0.88	0.6033	0.6979	0.8644	1.0129	278.82
0.90	0.5904	0.6873	0.8591	1.0088	284.27
0.92	0.5776	0.6766	0.8537	1.0056	289.68
0.94	0.5649	0.6660	0.8482	1.0031	295.03
0.96	0.5523	0.6554	0.8427	1.0014	300.32
0.98	0.5398	0.6448	0.8372	1.0003	305.57

M	P/P_i	ρ/ρ_i	T/T_i	A/A_c	U^*
1.00	0.5274	0.6342	0.8316	1.0000	310.77
1.02	0.5152	0.6237	0.8260	1.0003	315.91
1.04	0.5031	0.6132	0.8203	1.0013	321.00
1.06	0.4911	0.6028	0.8146	1.0029	326.04
1.08	0.4792	0.5924	0.8089	1.0051	331.02
1.10	0.4675	0.5821	0.8032	1.0079	335.95
1.12	0.4560	0.5718	0.7974	1.0113	340.83
1.14	0.4446	0.5617	0.7917	1.0152	345.66
1.16	0.4335	0.5516	0.7859	1.0197	350.43
1.18	0.4224	0.5416	0.7801	1.0248	355.16
1.20	0.4116	0.5316	0.7742	1.0304	359.83
1.22	0.4010	0.5218	0.7684	1.0365	364.44
1.24	0.3905	0.5121	0.7626	1.0431	369.01
1.26	0.3802	0.5024	0.7567	1.0503	373.52
1.28	0.3701	0.4929	0.7509	1.0579	377.98
1.30	0.3602	0.4835	0.7450	1.0661	382.39
1.32	0.3505	0.4742	0.7392	1.0748	386.75
1.34	0.3410	0.4650	0.7333	1.0840	391.05
1.36	0.3317	0.4559	0.7275	1.0937	395.31
1.38	0.3225	0.4469	0.7217	1.1039	399.51
1.40	0.3136	0.4381	0.7159	1.1146	403.66
1.42	0.3049	0.4294	0.7101	1.1258	407.77
1.44	0.2963	0.4208	0.7043	1.1374	411.82
1.46	0.2880	0.4123	0.6985	1.1496	415.82
1.48	0.2798	0.4040	0.6927	1.1623	419.78
1.50	0.2719	0.3957	0.6870	1.1756	423.68
1.52	0.2641	0.3876	0.6813	1.1893	427.54
1.54	0.2565	0.3797	0.6756	1.2035	431.35
1.56	0.2491	0.3718	0.6699	1.2182	435.11
1.58	0.2419	0.3641	0.6642	1.2335	438.82
1.60	0.2348	0.3566	0.6586	1.2493	442.49
1.62	0.2280	0.3491	0.6530	1.2656	446.11
1.64	0.2213	0.3418	0.6474	1.2824	449.68
1.66	0.2148	0.3346	0.6418	1.2998	453.21
1.68	0.2084	0.3275	0.6363	1.3177	456.69
1.70	0.2022	0.3206	0.6308	1.3362	460.13
1.72	0.1962	0.3138	0.6254	1.3552	463.52
1.74	0.1904	0.3071	0.6199	1.3748	466.87
1.76	0.1847	0.3005	0.6145	1.3949	470.17
1.78	0.1791	0.2941	0.6092	1.4156	473.44
1.80	0.1738	0.2878	0.6038	1.4369	476.66
1.82	0.1685	0.2816	0.5985	1.4588	479.83
1.84	0.1634	0.2755	0.5933	1.4813	482.97
1.86	0.1585	0.2695	0.5880	1.5044	486.06
1.88	0.1537	0.2637	0.5828	1.5281	489.11
1.90	0.1490	0.2580	0.5777	1.5524	492.13
1.92	0.1445	0.2524	0.5726	1.5774	495.10
1.94	0.1401	0.2469	0.5675	1.6030	498.03
1.96	0.1358	0.2415	0.5625	1.6292	500.93
1.98	0.1317	0.2362	0.5575	1.6561	503.78

M	P/P_i	ρ/ρ_i	T/T_i	A/A_c	U^*
2.00	0.1277	0.2311	0.5525	1.6837	506.60
2.02	0.1238	0.2260	0.5476	1.7120	509.38
2.04	0.1200	0.2211	0.5427	1.7409	512.12
2.06	0.1163	0.2162	0.5378	1.7705	514.83
2.08	0.1127	0.2115	0.5330	1.8009	517.50
2.10	0.1093	0.2069	0.5283	1.8319	520.14
2.12	0.1059	0.2023	0.5235	1.8637	522.73
2.14	0.1027	0.1979	0.5188	1.8963	525.30
2.16	0.0995	0.1935	0.5142	1.9296	527.83
2.18	0.0965	0.1893	0.5096	1.9636	530.33
2.20	0.0935	0.1851	0.5050	1.9985	532.79
2.22	0.0906	0.1810	0.5005	2.0341	535.22
2.24	0.0878	0.1771	0.4960	2.0705	537.61
2.26	0.0851	0.1732	0.4916	2.1078	539.98
2.28	0.0825	0.1694	0.4872	2.1459	542.31
2.30	0.0800	0.1657	0.4828	2.1848	544.61
2.32	0.0775	0.1620	0.4785	2.2246	546.89
2.34	0.0751	0.1585	0.4742	2.2652	549.13
2.36	0.0728	0.1550	0.4700	2.3068	551.34
2.38	0.0706	0.1516	0.4658	2.3492	553.52
2.40	0.0684	0.1483	0.4616	2.3925	555.67
2.42	0.0663	0.1450	0.4575	2.4368	557.79
2.44	0.0643	0.1418	0.4534	2.4820	559.89
2.46	0.0623	0.1387	0.4493	2.5282	561.95
2.48	0.0604	0.1357	0.4453	2.5753	563.99
2.50	0.0586	0.1327	0.4414	2.6235	566.01
2.52	0.0568	0.1298	0.4375	2.6726	567.99
2.54	0.0551	0.1270	0.4336	2.7228	569.95
2.56	0.0534	0.1242	0.4297	2.7740	571.88
2.58	0.0518	0.1215	0.4259	2.8262	573.79
2.60	0.0502	0.1189	0.4221	2.8795	575.67
2.62	0.0487	0.1163	0.4184	2.9339	577.53
2.64	0.0472	0.1138	0.4147	2.9894	579.36
2.66	0.0458	0.1113	0.4110	3.0461	581.17
2.68	0.0444	0.1089	0.4074	3.1038	582.95
2.70	0.0430	0.1066	0.4038	3.1628	584.71
2.72	0.0417	0.1043	0.4003	3.2229	586.45
2.74	0.0405	0.1020	0.3968	3.2842	588.17
2.76	0.0393	0.0998	0.3933	3.3467	589.86
2.78	0.0381	0.0977	0.3899	3.4104	591.53
2.80	0.0369	0.0956	0.3865	3.4754	593.18
2.82	0.0358	0.0936	0.3831	3.5417	594.80
2.84	0.0348	0.0916	0.3798	3.6092	596.41
2.86	0.0337	0.0896	0.3765	3.6781	597.99
2.88	0.0327	0.0877	0.3732	3.7483	599.56
2.90	0.0318	0.0858	0.3700	3.8198	601.10
2.92	0.0308	0.0840	0.3668	3.8927	602.63
2.94	0.0299	0.0822	0.3636	3.9670	604.13
2.96	0.0290	0.0805	0.3605	4.0427	605.61
2.98	0.0282	0.0788	0.3574	4.1198	607.08

* dans le cas où $T_i = 288\text{ K}$

Relations de saut à travers un choc droit

Indices:

- 1 : Quantités juste avant l'onde de choc (amont)
- 2 : Quantités juste après l'onde de choc (aval)
- $i, 1$: Quantités d'arrêt isentropiques en amont de l'onde de choc
- $i, 2$: Quantités d'arrêt isentropiques en aval de l'onde de choc

Relations de saut:

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma} \quad (1)$$

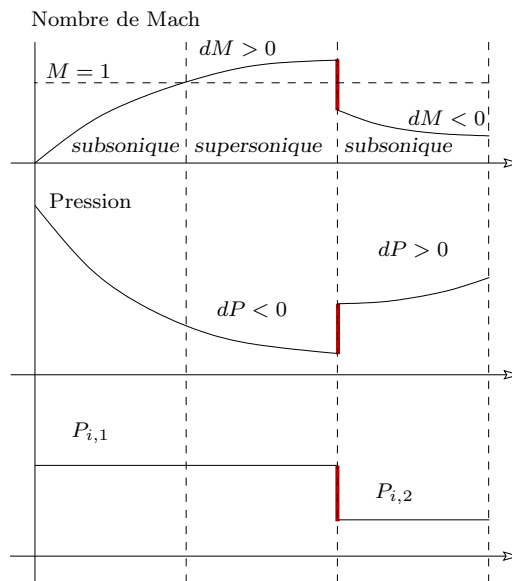
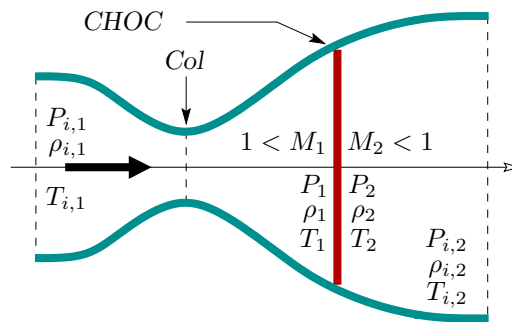
$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) \quad (2)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} \quad (3)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = (2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma) \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1)^2 M_1^2} \quad (4)$$

$$T_{i,2} = T_{i,1} \quad (5)$$

$$\frac{P_{i,2}}{P_{i,1}} = \frac{\rho_{i,2}}{\rho_{i,1}} = \left\{ \frac{(\gamma + 1)^{\gamma+1} M_1^{2\gamma}}{(2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma) [2 + (\gamma - 1)M_1^2]^\gamma} \right\}^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad (6)$$



M_1	M_2	P_2/P_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	$P_{i,2}/P_{i,1}$
1.00	1.000	1.0000	1.0000	1.0000	1.00000
1.02	0.981	1.0472	1.0334	1.0134	0.99999
1.04	0.962	1.0953	1.0669	1.0266	0.99992
1.06	0.944	1.1444	1.1007	1.0397	0.99975
1.08	0.928	1.1944	1.1346	1.0527	0.99943
1.10	0.912	1.2454	1.1687	1.0656	0.99893
1.12	0.897	1.2972	1.2029	1.0785	0.99822
1.14	0.882	1.3501	1.2372	1.0912	0.99726
1.16	0.868	1.4038	1.2716	1.1040	0.99606
1.18	0.855	1.4585	1.3061	1.1167	0.99458
1.20	0.842	1.5141	1.3407	1.1294	0.99281
1.22	0.830	1.5706	1.3753	1.1420	0.99075
1.24	0.818	1.6281	1.4100	1.1547	0.98838
1.26	0.807	1.6866	1.4446	1.1674	0.98570
1.28	0.796	1.7459	1.4794	1.1802	0.98271
1.30	0.786	1.8062	1.5141	1.1929	0.97941
1.32	0.776	1.8674	1.5488	1.2057	0.97580
1.34	0.767	1.9296	1.5835	1.2186	0.97188
1.36	0.757	1.9927	1.6181	1.2315	0.96765
1.38	0.749	2.0567	1.6527	1.2445	0.96311
1.40	0.740	2.1217	1.6872	1.2575	0.95829
1.42	0.732	2.1876	1.7217	1.2706	0.95317
1.44	0.724	2.2544	1.7561	1.2837	0.94777
1.46	0.716	2.3222	1.7904	1.2970	0.94210
1.48	0.709	2.3909	1.8246	1.3103	0.93616
1.50	0.701	2.4605	1.8587	1.3237	0.92996
1.52	0.694	2.5311	1.8927	1.3373	0.92352
1.54	0.688	2.6026	1.9266	1.3509	0.91684
1.56	0.681	2.6750	1.9603	1.3646	0.90993
1.58	0.675	2.7484	1.9939	1.3784	0.90281
1.60	0.669	2.8227	2.0274	1.3923	0.89549
1.62	0.663	2.8979	2.0607	1.4063	0.88797
1.64	0.657	2.9741	2.0938	1.4204	0.88026
1.66	0.652	3.0512	2.1268	1.4346	0.87238
1.68	0.646	3.1293	2.1596	1.4490	0.86434
1.70	0.641	3.2083	2.1923	1.4635	0.85615
1.72	0.636	3.2882	2.2247	1.4780	0.84781
1.74	0.631	3.3690	2.2570	1.4927	0.83935
1.76	0.626	3.4508	2.2890	1.5075	0.83076
1.78	0.622	3.5336	2.3209	1.5225	0.82206
1.80	0.617	3.6172	2.3526	1.5376	0.81327
1.82	0.613	3.7018	2.3840	1.5527	0.80438
1.84	0.608	3.7873	2.4153	1.5681	0.79541
1.86	0.604	3.8738	2.4463	1.5835	0.78637
1.88	0.600	3.9612	2.4772	1.5991	0.77727
1.90	0.596	4.0495	2.5078	1.6148	0.76811
1.92	0.592	4.1388	2.5382	1.6306	0.75891
1.94	0.589	4.2290	2.5683	1.6466	0.74967
1.96	0.585	4.3201	2.5983	1.6627	0.74040
1.98	0.581	4.4122	2.6280	1.6789	0.73111

M_1	M_2	P_2/P_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	$P_{i,2}/P_{i,1}$
2.00	0.578	4.5052	2.6575	1.6953	0.72181
2.02	0.575	4.5991	2.6867	1.7118	0.71250
2.04	0.571	4.6940	2.7157	1.7285	0.70319
2.06	0.568	4.7898	2.7445	1.7452	0.69389
2.08	0.565	4.8866	2.7730	1.7622	0.68460
2.10	0.562	4.9842	2.8013	1.7792	0.67532
2.12	0.559	5.0829	2.8294	1.7964	0.66607
2.14	0.556	5.1824	2.8572	1.8138	0.65686
2.16	0.553	5.2829	2.8848	1.8313	0.64767
2.18	0.551	5.3843	2.9122	1.8489	0.63853
2.20	0.548	5.4867	2.9393	1.8667	0.62943
2.22	0.545	5.5899	2.9662	1.8846	0.62038
2.24	0.543	5.6942	2.9928	1.9026	0.61139
2.26	0.540	5.7993	3.0192	1.9208	0.60245
2.28	0.538	5.9054	3.0453	1.9392	0.59357
2.30	0.535	6.0124	3.0712	1.9577	0.58476
2.32	0.533	6.1204	3.0969	1.9763	0.57601
2.34	0.531	6.2293	3.1223	1.9951	0.56734
2.36	0.528	6.3391	3.1475	2.0140	0.55873
2.38	0.526	6.4499	3.1725	2.0331	0.55021
2.40	0.524	6.5616	3.1972	2.0523	0.54176
2.42	0.522	6.6742	3.2217	2.0717	0.53339
2.44	0.520	6.7878	3.2459	2.0912	0.52511
2.46	0.518	6.9023	3.2699	2.1108	0.51691
2.48	0.516	7.0177	3.2937	2.1307	0.50879
2.50	0.514	7.1341	3.3172	2.1506	0.50077
2.52	0.512	7.2514	3.3406	2.1707	0.49283
2.54	0.510	7.3696	3.3636	2.1910	0.48498
2.56	0.508	7.4888	3.3865	2.2114	0.47723
2.58	0.507	7.6089	3.4091	2.2319	0.46957
2.60	0.505	7.7300	3.4315	2.2526	0.46200
2.62	0.503	7.8520	3.4537	2.2735	0.45452
2.64	0.501	7.9749	3.4756	2.2945	0.44714
2.66	0.500	8.0987	3.4974	2.3157	0.43985
2.68	0.498	8.2235	3.5189	2.3370	0.43266
2.70	0.497	8.3492	3.5402	2.3584	0.42556
2.72	0.495	8.4759	3.5612	2.3800	0.41856
2.74	0.494	8.6035	3.5821	2.4018	0.41166
2.76	0.492	8.7320	3.6027	2.4237	0.40485
2.78	0.491	8.8615	3.6232	2.4458	0.39814
2.80	0.489	8.9918	3.6434	2.4680	0.39152
2.82	0.488	9.1232	3.6634	2.4904	0.38499
2.84	0.486	9.2554	3.6832	2.5129	0.37857
2.86	0.485	9.3886	3.7028	2.5356	0.37223
2.88	0.484	9.5228	3.7222	2.5584	0.36599
2.90	0.482	9.6578	3.7414	2.5814	0.35985
2.92	0.481	9.7938	3.7604	2.6045	0.35380
2.94	0.480	9.9308	3.7792	2.6278	0.34784
2.96	0.479	10.0686	3.7978	2.6512	0.34197
2.98	0.477	10.2075	3.8162	2.6748	0.33619

