
Exercices et problèmes – Mécanique des fluides 1



Equipe pédagogique :
David Fabre, Louise Tonini, Gérald Bardan, Frédéric Moulin

Table des matières

1	Analyse dimensionnelle et similitude	2
1.0	Force de traînée sur une automobile	2
1.1	Force de résistance à l'avancement d'un bateau de pêche	2
1.X	Vitesse d'un animal volant	3
2	Hydrostatique	4
2.0	Forces de pression sur un barrage	4
2.1	La montgolfière	4
2.2	Modèle d'atmosphère normalisée	4
2.3	Envasement d'une barge	5
2.X	Lois de pression et de température dans l'océan	5
3	Écoulements visqueux I : Rhéologie et écoulements parallèles stationnaires	6
3.0	Écoulement de Poiseuille	6
3.1	Écoulement de dentifrice	7
3.2	Film de peinture (Partiel 2018)	7
3.3	Écoulement de Couette-Taylor pour un fluide Newtonien (préparation au TP rhéologie)	8
3.X	Écoulement de Taylor-Couette pour un fluide de Bingham	9
4	Écoulements visqueux II : Écoulements parallèles instationnaires	10
4.0	Premier problème de Stokes	10
4.1	Écoulement au voisinage d'une paroi oscillante (second problème de Stokes)	10
4.2	Rythmes cardiaques (préparation au TP numérique)	11
4.X	Comportement visco-élastique ; modèles de Maxwell et de Kelvin-Voigt	11
5	Écoulements visqueux III : Écoulements rampants	13
5.0	Amortisseur hydraulique	13
5.1	L'expérience de la goutte de poix	14
5.2	Drainage entre deux disques rapprochés	15
5.3	Aspiration d'une couche limite	16
5.X	Écoulement de Stokes autour d'une sphère	17
6	Écoulements en conduite et couches limites	18
6.0	Dimensionnement d'un chauffe-eau solaire	18
6.1	Écoulement dans une galerie	18
6.2	Force de frottement sur une coque de sous-marin	18
6.3	Recherche d'un régime d'écoulement	19
6.4	Écoulement dans un oléoduc	19

1 Analyse dimensionnelle et similitude

1.0 Force de traînée sur une automobile

(Exercice préparatoire ; correction sur le site web du cours)

On cherche à estimer la force de traînée D s'exerçant sur une automobile de longueur L et surface frontale S roulant à la vitesse V dans de l'air, à l'aide d'une expérience utilisant une maquette à échelle réduite dans un tunnel hydrodynamique.

1. Listez et discutez les paramètres physiques pertinents et indépendants dans ce problème.
2. En utilisant les principes de l'analyse dimensionnelle, montrez que la traînée s'exprime simplement sous la forme suivante :

$$D = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_x(Re), \quad \text{avec } Re = \frac{\rho V L}{\mu}$$

3. Calculez la valeur du nombre de Reynolds, pour une automobile de longueur $L = 4m$ (et surface frontale $S = 1.74m^2$), roulant à la vitesse $V = 90km/h$ dans de l'air (de propriétés ρ_a μ_a données dans le formulaire).
4. Dans l'expérience, la maquette est à l'échelle 1/10 (c.a.d. $L_m = L/10$). La vitesse dans le tunnel hydrodynamique est notée V_m . Le fluide est de l'eau (de propriétés ρ_m μ_m données dans le formulaire).

Quelle doit être la valeur de V_m pour assurer la similitude de Reynolds ?

5. Le tunnel hydrodynamique étant réglé à la vitesse V_m précédemment déterminée, on mesure à l'aide d'une balance de forces une traînée sur la maquette $D_m = 911N$. En déduire le C_x , puis la traînée D sur la voiture.
6. En déduire la puissance dissipée par les forces aérodynamiques, puis la puissance qui doit être fournie par le moteur, en supposant que le rendement énergétique global de celui-ci est $\eta = 20\%$.

1.1 Force de résistance à l'avancement d'un bateau de pêche

On cherche à déterminer la résistance à l'avancement d'un petit bateau de pêche naviguant dans de l'eau de mer à la vitesse nominale $U = 4m/s$. La longueur du navire est de $L = 10m$, et sa surface mouillée est de $S = 37,64m^2$. La masse volumique ρ , la viscosité dynamique μ et la viscosité cinématique $\nu = \mu/\rho$ de l'eau de mer sont données dans le formulaire.

A. Analyse dimensionnelle

1. Listez tous les paramètres physiques pertinents et indépendants ayant une influence sur la force de résistance.
2. En déduire que la résistance à l'avancement peut se mettre sous la forme suivante :

$$R_T = \frac{1}{2} \rho S U^2 \cdot C_T \left(\frac{UL}{\nu}, \frac{U}{\sqrt{gL}} \right)$$

3. Quels nombres adimensionnels classiques reconnaissez-vous là ? quelle est leur interprétation ?
4. Calculez la valeur de ces deux nombres dans le cas du bateau de pêche en condition réelles.

B. Etude de similitude

On cherche à déterminer la traînée à l'aide d'une expérience en bassin de traction (dans l'eau douce), à l'aide d'une maquette à l'échelle 1/10ème.

5. Est-il possible de faire une expérience en similitude totale (nombres de Froude et de Reynolds identiques dans l'expérience et le navire réel) ?
6. Quelle doit être la vitesse U_m de la maquette si l'on souhaite respecter la similitude de Reynolds ? Que vaut alors le nombre de Froude de l'expérience ? ce cas vous semble-t-il réaliste ?
7. Quelle doit être la vitesse U_m de la maquette si l'on souhaite respecter la similitude de Froude ? Que vaut alors le nombre de Reynolds Re_m de l'expérience ?

C. Similitude partielle sous l'hypothèse de Froude

Lorsque $Re \gg 10^5$ et $Fr \leq 0.4$, l'expérience montre que l'on peut faire l'hypothèse de Froude, qui consiste à supposer que la résistance à l'avancement se décompose en deux parties données par les expressions suivantes :

$$C_T(Re, Fr) = C_v(Re) + C_w(Fr)$$

où C_v est le coefficient de traînée visqueuse, estimé par la loi empirique suivante¹ :

$$C_v(Re) = \frac{0.074}{(\log_{10} Re - 2)^2}$$

et $C_w(Fr)$ est le coefficient de traînée de vagues, qui peut être mesuré en effectuant une expérience en similitude de Froude.

8. Pour une vitesse d'avance de la maquette correspondant à celle calculée à la question 7, on mesure sur la maquette une résistance à l'avancement $R_{T,m} = 2.228N$.

En déduire la traînée totale exercée sur le navire réel C_T , puis la puissance qui doit être fournie par le moteur du bateau.

1.X Vitesse d'un animal volant

On cherche à estimer la vitesse V d'un animal volant (insecte, oiseau ou chauve-souris) en fonction de sa masse M .

1. Listez les différents paramètres physiques intervenant dans le problème, et discutez leur pertinence. Montrez qu'il est légitime de supposer que la vitesse est donnée par une loi de la forme

$$V = \mathcal{F}(M, L, \rho, g).$$

où ρ est la masse volumique de l'air, g l'accélération de la gravité, L l'envergure de l'oiseau, et M sa masse.

On admettra (jusqu'à la question 9) que la viscosité de l'air ν n'est pas un paramètre pertinent.

2. Donnez les dimensions physiques de V , ρ , g , L et M .
3. En appliquant les principes de l'analyse dimensionnelle, montrez que la loi de vitesse peut se mettre sous la forme :

$$V = \sqrt{gL} \mathcal{F}\left(\frac{M}{\rho L^3}\right).$$

4. Calculez le paramètre $\frac{M}{\rho L^3}$ pour les différents animaux détaillés dans le tableau ci-dessous. Justifiez pourquoi ce paramètre varie peu d'un animal à un autre.

Animal	Poids	Envergure	Vitesse	$M/(\rho L^3)$	$V/M^{1/6}$	Re
Guêpe	100mg	20mm	20km/h			
Colibri	2.5g	10cm	45km/h			
Hirondelle	17g	28cm	60km/h			
Aigle	6kg	2m	160km/h			
Airbus A300	150T	60m	855km/h			

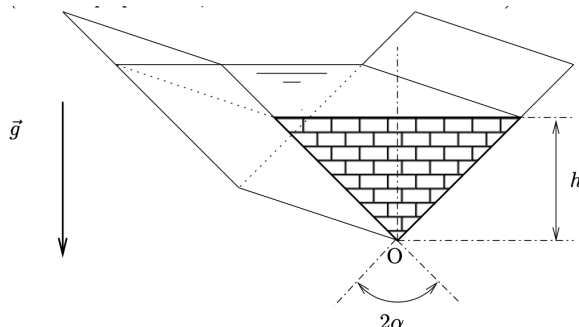
5. En déduire que la vitesse d'un animal volant est proportionnel à $M^{1/6}$.
6. Application : calculez le rapport $V/M^{1/6}$ pour les différents animaux détaillés dans le tableau ci-dessus. Commentez les résultats.
7. En se basant sur l'analyse précédente, à combien estimez vous la vitesse d'une mouette de masse 400g ?
8. Calculez le nombre de Reynolds pour les différents animaux du tableau ci-dessus.
9. On justifiera plus tard (cf. chapitre 9 et programme de M1) que lorsque $Re \gg 10^4$, les forces exercées sur un objet "profilé" ne dépendent plus, en première approximation, de la viscosité du fluide. Justifiez l'hypothèse faite à la question 1.

1. Cette loi correspond à la formule de Hugues modifiée en considérant un coefficient de forme $\kappa = 0.104$; voir chapitre 6, formulaire section H et TD 6.4.

2 Hydrostatique

2.0 Forces de pression sur un barrage

(Exercice préparatoire ; correction sur le site web du cours)



On considère un lac dans une vallée de section triangulaire, d'angle au sommet 2α . Le lac est fermé par un barrage de hauteur h . Le lac est rempli d'eau de densité constante ρ , et sa surface est à la pression atmosphérique P_a .

1. Donnez l'expression de la pression $P(z)$ régnant dans le lac, où z est l'altitude comptée par rapport à la base du barrage.
2. Calculez la résultante $\vec{R}$ des forces de pression exercées par l'eau et par l'air sur le barrage.
3. Calculez le moment $\vec{M}_O$ des forces de pression par rapport au point O .
4. Donnez la position du "centre de poussée" C des forces de pression.
5. Applications numériques avec $H = 50m$, $\alpha = 60^\circ$.

2.1 La montgolfière

On considère une montgolfière, constituée d'un ballon sphérique et de rayon $R = 8m$, ouvert à sa base par une ouverture de section négligeable, et d'une nacelle.

On souhaite déterminer la température à laquelle il faut chauffer le gaz intérieur pour pouvoir voler à l'altitude de $h = 1000m$.

1. En utilisant un modèle d'atmosphère isotherme à température $T_0 = 15^\circ C = 288K$, donnez les lois $P(z)$ et $\rho(z)$ sachant que la pression au niveau du sol est $P_0 = 1024hPa$.
2. Donnez la masse volumique ρ_{ext} ainsi que la pression $P_{ext,h}$ caractérisant l'air à l'extérieur de la montgolfière à l'altitude $h = 1000m$ correspondant à la base du ballon.
3. Quelle erreur commet-on en supposant la masse volumique constante à l'échelle du ballon ? Montrez que dans cette approximation la pression peut être approximée par une loi affine de la forme $P_{ext}(z') \approx P_{ext,h} + az'$ où $z' = z - h_0$ est l'altitude comptée à partir de la base du ballon.
4. Le ballon est rempli d'air de masse volumique ρ_{int} supposée uniforme. Donnez la loi de pression $P_{int}(z')$ à l'intérieur du ballon.
5. Calculez la résultante des efforts exercés par l'air (intérieur et extérieur) sur les deux faces de l'enveloppe du ballon.
6. Retrouvez le résultat précédent à l'aide du théorème d'Archimède.
7. Application : calculez la valeur de ρ_{int} nécessaire pour maintenir la montgolfière en équilibre à l'altitude 1000m, considérant que sa masse totale est $m = 600kg$. En déduire la température T_{int} mesurée à la base du ballon.

2.2 Modèle d'atmosphère normalisée

Le modèle d'atmosphère normalisée (http://fr.wikipedia.org/wiki/Atmosphère_normalisée) est un modèle adopté internationalement qui découpe l'atmosphère en sept couches successives dans lesquelles la température est donnée par une loi affine de la forme

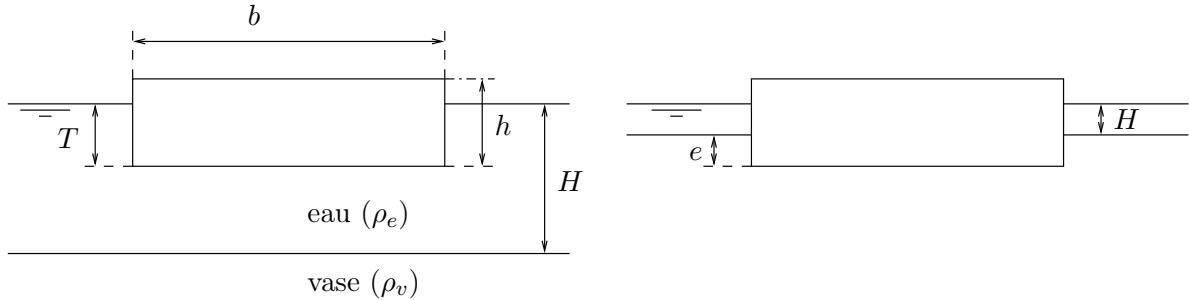
$$T(z) = T_0(1 - \alpha z).$$

On considère ici uniquement la couche inférieure appelée troposphère ($0 < z < 11km$) dans laquelle les paramètres de cette loi sont $\alpha = 22.6 \cdot 10^{-6}m^{-1}$ et $T_0 = 288K$.

Donnez les lois $P(z)$ et $\rho(z)$ correspondantes, sachant que la pression au niveau du sol est $P_0 = 1013hPa$.

Donnez la valeur de la pression et de la température à l'altitude de l'Everest (8848m). Comparez avec la prédiction du modèle "atmosphère isotherme".

2.3 Envasement d'une barge



On considère une barge de section carrée, de largeur $b = 10m$ de hauteur $h = 1m$, et de masse $M = 75t$. La barge flotte dans de l'eau de mer. A marée haute la hauteur d'eau est $H > h$.

1. Calculez le tirant d'eau de la barge à marée haute.
2. A marée basse la hauteur d'eau est de $H = 25cm$, et la barge s'enfonce dans la vase, que l'on considère comme un fluide de masse volumique $\rho_v = 2\rho_e$. Calculez la profondeur d'envasement e .

2.X Lois de pression et de température dans l'océan

On cherche à estimer les lois de pression $P(z)$ et de masse volumique $\rho(z)$ dans l'océan en fonction de la profondeur z . Les altitudes z sont comptées vers le bas à partir de la surface de l'océan, et la pression au niveau de la mer est $P_0 = 1,013Bars$, en utilisant les modèles suivants :

(a) La couche superficielle, qui s'étend jusqu'à environ 500 mètres de profondeur, est appelée thermocline. Dans cette couche la température varie entre $T = 25^\circ C$ (en surface) et $T = 1.5^\circ C$ (à la base de la thermocline). On suppose pour simplifier que la salinité est constante ($S = 35g/kg$).

On supposera que dans la thermocline la compressibilité est négligeable, de sorte que la masse volumique dépend seulement de la température, et est donnée par la relation simplifiée suivante (issue de l'équation d'état officielle IES80, avec T en $^\circ C$, ρ en kg/m^3 cf. Formulaire A3) :

$$\rho = 1028.15 - 0.05403 \times T - 0.006762 \times T^2 + 7.955 \cdot 10^{-5} \times T^3 - 9.3152 \cdot 10^{-7} \times T^4 + 6.5363 \cdot 10^{-9} \times T^5.$$

(b) Dans les couches plus profondes, à cause de la compressibilité de l'eau de mer, la masse volumique et la température varient (faiblement) en fonction de la pression. On supposera que dans les couches profondes les coefficients thermodynamiques et thermoélastiques sont constants, et ont les valeurs suivantes :

$$\chi_s = 4.6 \cdot 10^{-10} Pa^{-1}; \quad \alpha_p = 8 \cdot 10^{-5} K^{-1}; \quad c_p = 4000 J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}.$$

1. Donnez la masse volumique en surface (ρ_0) et à la base de la thermocline (ρ_1). En déduire la loi de masse volumique $\rho(z)$ dans la thermocline, en supposant qu'elle varie linéairement avec la profondeur.
2. Déduisez-en la loi de pression $P(z)$ dans la thermocline. Donnez en particulier la pression P_1 à la base de la thermocline.
3. Dans les couches profondes, la masse volumique peut s'exprimer en bonne approximation par l'équation linéaire suivante :

$$\rho = \rho_1 (1 + \chi_s (P - P_1)).$$

Donnez les lois de pression $P(z)$ et de masse volumique dans les couches profondes de l'océan ($z > z_1$). Donnez une approximation polynômiale de ces lois sous la forme $P(z) = P_1 + a(z - z_1) + b(z - z_1)^2$, et $\rho(z) = \rho_1 + c(z - z_1)$.

4. Démontrez la relation suivante entre les coefficients thermodynamiques :

$$\epsilon_s = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_s = \frac{\alpha_p}{\rho c_p}$$

5. Déduisez-en la loi de température $T(z)$ dans les couches profondes ($z > z_1$).
6. Application. La fosse océanique la plus profonde sur terre est située dans le Pacifique, au large de l'archipel des Mariannes, et atteint la profondeur $z = 11000m$. Donnez la pression (en bars), la masse volumique et la température régnant à cette profondeur.

3 Ecoulements visqueux I : Rhéologie et écoulements parallèles stationnaires

3.0 Ecoulement de Poiseuille

(Exercice préparatoire ; correction sur le site web du cours)

On considère l'écoulement incompressible d'un fluide newtonien homogène de masse volumique ρ dans une conduite de section circulaire de rayon R (et section $S = \pi R^2$), de grande longueur L suivant l'axe Oz . Le fluide dans la conduite est mis en écoulement sous l'action simultanée d'un gradient de pression et de la gravité. On suppose que le tuyau est vertical et l'écoulement descendant ; la gravité est donc de la forme $\vec{g} = +g\vec{e}_z$.² L'entrée du tuyau est à l'altitude (comptée dans la direction descendante) z_1 et à la pression P_1 ; la sortie est à l'altitude z_2 et à la pression P_2 .

On notera ν et $\mu = \rho\nu$ les viscosités cinématique et dynamique. La géométrie du problème conduit naturellement à travailler dans un repérage cylindrique (r, θ, z) .

1. Justifier en quelques mots pourquoi il est légitime de rechercher a priori une loi de vitesse de la forme

$$\vec{u} = u_z(r) \vec{e}_z. \quad (1)$$

2. A partir de l'équation de Navier-Stokes incompressibles en coordonnées cylindrique (cf. Formulaire, section D.2), montrez que la vitesse obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = 0. \quad (2)$$

3. **Retrouvez** cette expression à partir d'un bilan de quantité de mouvement sur un volume de contrôle élémentaire correspondant à une "couronne" de dimensions dx , dr et $2\pi r$.
4. Montrez que la pression p dépend uniquement de z , et ce de manière linéaire, c'est-à-dire qu'elle a l'expression suivante :

$$p = p(z) = P_1 + \frac{(P_2 - P_1)(z - z_1)}{L}$$

5. En déduire que $u_z(r)$ obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = -\frac{Gr}{\mu}, \quad \text{où } G = (P_1 - P_2)/L + \rho g \text{ est le "gradient de pression effectif".}$$

6. Après avoir donné les conditions mathématiques vérifiées par la vitesse en $r = R$ et $r = 0$, déterminer la vitesse $u_z(r)$ en fonction du gradient de pression effectif G et des dimensions du tuyau. Tracez l'allure de ce profil de vitesse.
7. Calculer le débit massique $\dot{m}$ passant dans la conduite, puis en déduire la vitesse moyenne $U = \frac{\dot{m}}{\rho S}$ aussi appelée *vitesse débitante*, en fonction du gradient de pression effectif G et des dimensions du tuyaux. Comparer à la vitesse maximale $U_{\max}$.
8. On appelle $\Delta_1^2 = (P_1 + \rho g z_1) - (P_2 + \rho g z_2)$ la "perte de charge" de l'écoulement dans le tuyau. Montrez que celle-ci se met sous la forme

$$\Delta_1^2 = \frac{\rho U^2}{2} \times \frac{L}{D} \times \lambda,$$

ou vous exprimerez le "coefficient de perte de charge" λ en fonction du nombre de Reynolds basé sur le diamètre D , $Re = \frac{UD}{\nu}$.

9. Déterminer l'expression de la composante $\tau_{zr}(r)$ du tenseur des contraintes visqueuses et discuter de son signe. Donnez ensuite le vecteur contrainte visqueuse $\vec{\tau}_p$ exercée par le fluide sur la paroi du tube, et précisez son orientation.
10. En déduire la force exercée par l'écoulement sur la conduite de longueur L , et montrez que celle-ci est de la forme

$$\vec{F}_{\mathcal{F} \rightarrow S} = \frac{\rho S U^2}{2} \times \frac{L}{D} \times \lambda \times \vec{e}_z$$

où λ est le coefficient de perte de charge déjà rencontré à la question 5.

11. Retrouvez ce résultat à partir d'un bilan des forces exercées sur le tuyau.

Références :

Poiseuille J.-M. L. (1844) Le mouvement des liquides dans les tubes de petits diamètres.

2. La démarche se généralise sans trop de difficulté au cas d'un tuyau incliné par rapport à la verticale, en remplaçant g par sa composante g_z selon l'axe du tuyau

3.1 Ecoulement de dentifrice

Le dentifrice est un exemple de "fluide à seuil" qui ne s'écoule que si la contrainte de cisaillement est supérieure à un seuil τ_c . On étudie ici l'écoulement à travers l'orifice du tube, modélisé comme un tube cylindrique de longueur L rempli de dentifrice, soumis à une différence de pression $p_e - p_s$, en régime stationnaire.

1. En vous appuyant sur une figure, établir un bilan de forces pour un volume élémentaire correspondant à un tore de section rectangulaire et de dimensions dr , dx et $2\pi r$.
2. En déduire l'expression de la contrainte de cisaillement τ_{xr} dans le tube en fonction de r et du gradient de pression global $(p_e - p_s)/L$.
3. A partir de quelle différence de pression le dentifrice s'écoule-t-il ?
4. Etablir l'expression du champ des vitesses, et représenter ce champ.
5. Etablir l'expression du débit en fonction du gradient de pression.

3.2 Film de peinture (Partiel 2018)

On considère un liquide de masse volumique ρ uniforme qui s'écoule sous la forme d'un film d'épaisseur uniforme h sur un plan incliné d'un angle θ par rapport à l'horizontale. On introduit un repère (x, y) où la direction x est alignée avec le plan incliné et y est la direction perpendiculaire.

Dans cet exercice on repartira de l'équation de Cauchy écrite sous la forme suivante :

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \vec{g} - \text{grad} p + \text{div}(\vec{\tau})$$

1. Sous des hypothèses que vous préciserez, montrez que l'équation de Cauchy peut se ramener à l'équation suivante :

$$0 = \rho g \sin \theta + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$$

2. Après avoir précisé la condition limite vérifiée par la contrainte en $y = h$, établir la loi $\tau_{xy}(y)$ donnant la contrainte visqueuse dans le film.
3. En déduire que la contrainte est maximale à la base du film et vaut :

$$\tau_{xy}(y = 0) = \rho g h \sin \theta$$

Donnez une interprétation simple de cette expression.

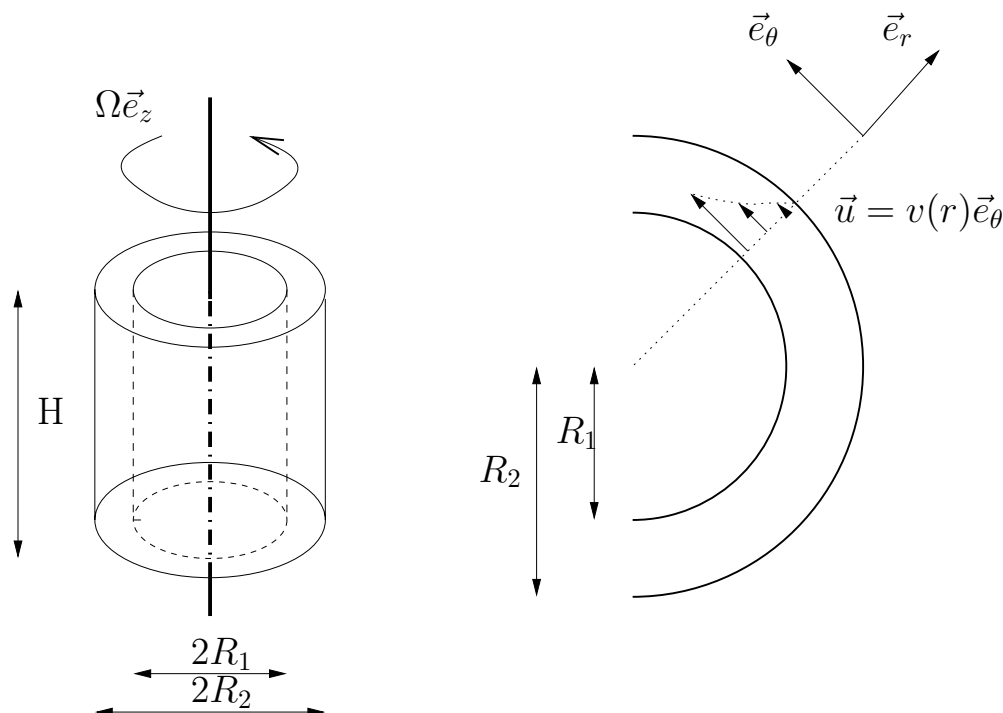
4. Dans le cas d'un fluide Newtonien, justifiez que la loi de vitesse $u(y)$ correspond à un polynôme d'ordre 2, et tracez la forme du profil $u(y)$ correspondant (on ne demande pas la résolution mathématique complète du problème).

Dans la suite on considère le cas d'un fluide non Newtonien obéissant à la loi de Bingham :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \begin{cases} 0 & (|\tau_{xy}| < \tau_c) \\ \frac{1}{\mu}(\tau_{xy} - \tau_c) & (\tau_{xy} > \tau_c) \\ \frac{1}{\mu}(\tau_{xy} + \tau_c) & (\tau_{xy} < -\tau_c) \end{cases}$$

5. Tracez la forme de la loi rhéologique (τ_{xy} en fonction de $\dot{\gamma} = \partial u / \partial y$) et comparez au cas d'un fluide Newtonien. Justifiez la désignation de "fluide à seuil" utilisée pour décrire ce type de fluide.
6. Montrez qu'il existe une épaisseur critique h_c telle que si $h < h_c$ le film ne coule pas. Exprimez h_c en fonction de ρ, g, θ et τ_c .
7. Dans le cas où $h > h_c$ tracez la forme attendue pour le profil de vitesse $u(y)$ (on ne demande pas une résolution mathématique complète du problème).
8. Application : On considère une peinture acrylique, décrite comme un fluide de Bingham avec les caractéristiques suivantes : $\tau_c = 1 \text{ Pa}$; $\rho = 850 \text{ kg/m}^3$; $\mu = 10^{-2} \text{ Pa}\cdot\text{s}$. Donnez l'épaisseur maximale h_c d'une couche de peinture sur une paroi verticale permettant d'éviter tout risque de coulure.

3.3 Écoulement de Couette-Taylor pour un fluide Newtonien (préparation au TP rhéologie)



On considère l'écoulement entre deux cylindres coaxiaux de rayon R_1 et R_2 , et de hauteur H . Le cylindre intérieur tourne à la vitesse angulaire Ω autour de son axe e_z , et le cylindre extérieur est fixe. Le fluide remplissant l'espace entre les deux cylindres est newtonien et incompressible, de masse volumique ρ , viscosité dynamique μ (et viscosité cinématique $\nu = \mu/\rho$). On néglige l'effet de la gravité.

L'écoulement est azimutal, c'est à dire de la forme $\vec{u} = v(r)\vec{e}_\theta$

1. A partir des équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques (Formulaire, section D.2), montrez que la vitesse azimutale $v(r, t)$ obéit à l'équation suivante :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) \right)$$

2. Justifiez pourquoi le gradient de pression $\partial p / \partial \theta$ est nul.
3. On cherche une solution stationnaire de l'équation (2). Montrez que la solution générale est de la forme $v(r) = Ar + B/r$.
4. Précisez les conditions aux limites $v(R_1)$ et $v(R_2)$.
5. En déduire la valeur des constantes A et B .
6. A partir du formulaire (section D.2), donnez l'expression du tenseur gradient des vitesses puis du tenseur des contraintes visqueuses. Montrez en particulier que la composante (θ, r) est donnée par

$$\tau_{\theta r} = \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right).$$

Pour quel type d'écoulement a-t-on $\tau_{\theta r} = 0$? Expliquez physiquement.

7. Ecrivez sous forme d'une intégrale le moment global $\vec{\mathcal{M}}_O$ (évalué au point O situé sur l'axe des cylindres et à mi-hauteur) des efforts exercés par le fluide sur le cylindre intérieur, et montrez que

$$\vec{\mathcal{M}}_O = -4\pi\mu H\Omega \frac{R_2^2 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \vec{e}_z.$$

8. Calculez le moment des efforts exercés par le fluide sur le cylindre intérieur. Que constatez-vous?
9. Application : les dimensions du viscosimètre sont $R_1 = 20\text{cm}$, $R_2 = 21\text{cm}$, $H = 20\text{cm}$. On fait tourner le cylindre intérieur à la vitesse $\Omega = 100\text{tours/s}$, et on mesure un moment $|\vec{\mathcal{M}}_O| = 6\text{Nm}$. Donnez la viscosité dynamique du fluide.

3.X Écoulement de Taylor-Couette pour un fluide de Bingham

On considère un fluide de masse volumique constante compris entre deux cylindres de rayon R_1 et R_2 et de hauteur H (grande devant R_1 et R_2). Le cylindre extérieur est fixe tandis que le cylindre intérieur tourne à la vitesse angulaire Ω .

On néglige la gravité.

On admettra que dans une base cylindrique (r, θ, z) , le champ de vitesse peut être recherché sous la forme $\vec{u} = [u_r, u_\theta, u_z] = [0, v(r, t), 0]$, tandis que la pression peut être supposée de la forme $p(r)$.

On admettra également que seule la composante $\tau_{r\theta}$ du tenseur des contraintes visqueuses est pertinente.

Partie A : équations du mouvement dans le cas général

1. On considère un volume de contrôle élémentaire $\delta V = dz \times dr \times (rd\theta)$. Représentez sur une figure l'ensemble des forces exercées sur ce volume élémentaire.
2. Calculez le moment cinétique $\delta \vec{L}_0$ du volume élémentaire par rapport à un point O situé sur l'axe des cylindres.
3. En appliquant le théorème du moment dynamique au volume élémentaire δV et en projetant dans la direction $\vec{e}_z$, montrez que l'écoulement est gouverné par l'équation suivante, analogue pour un écoulement cylindrique azimutal de l'équation de :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta})$$

4. En déduire, en régime stationnaire, que $\tau_{r\theta}$ est de la forme $\tau_{r\theta} = C/r^2$ où la constante peut être reliée au couple M_z exercé par le fluide sur le cylindre intérieur (on pourra se référer à l'exercice précédent).
5. En adoptant un point de vue Lagrangien, et en projetant l'équation de la dynamique appliquée au volume élémentaire selon la direction radiale, donnez une équation reliant le gradient de vitesse à $\partial p / \partial r$ au champ de vitesse. Quelle est l'interprétation physique de cette relation ?

Partie B : Fluide Newtonien

6. Donnez l'expression du tenseur des gradients de vitesse $\overset{\Rightarrow}{grad}(\vec{u})$ dans la base cylindrique, correspondant à l'écoulement purement azimutal considéré ici, puis celle du tenseur des taux de déformation $\vec{\vec{D}}$. Montrez en particulier que seules 2 parmi les 9 composantes de ce tenseur sont non nulles.
7. A partir de la loi rhéologique du fluide Newtonien, montrez que la composante $\tau_{r\theta}$ du tenseur des contraintes visqueuses peut s'écrire sous la forme $\tau_{r\theta} = \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v(r)}{r} \right)$.
8. A partir de l'équation établie à la question 3, donnez l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $v(r, t)$. Comparez cette expression à celle issue de l'équation de Navier-Stokes considérée à l'exercice précédent.

Partie C : cas d'un fluide de Bingham

La loi rhéologique d'un fluide de Bingham, exprimée en coordonnées cylindriques, est la suivante :

$$D_{r\theta} = \begin{cases} \frac{\tau_{r\theta} - \tau_c}{\mu} & \text{si } \tau_{r\theta} > \tau_c, \\ 0 & \text{si } \tau_{r\theta} < \tau_c. \end{cases}$$

9. A partir du résultat de la question 4, tracez l'allure de $\tau_{r\theta}$ en fonction de r sur l'intervalle $[R_1, R_2]$. Donnez les valeurs maximum et minimum de cette contrainte.
10. Montrez qu'il existe trois régimes possibles selon les valeurs respectives du couple M_z imposé et de la contrainte seuil τ_c : soit le fluide reste au repos, soit la totalité du fluide se met en mouvement, soit une partie seulement du fluide se met en mouvement. Dans le troisième régime, quelle partie du fluide se met en mouvement ?
11. Application numérique. Pour les dimensions $R_1 = 1\text{cm}$, $H = 20\text{cm}$, on observe que le fluide se met en mouvement pour un moment appliqué supérieur à $M_{z,min} = 4.5\text{Nm}$. Donnez la valeur de la contrainte seuil τ_c du fluide.

4 Ecoulements visqueux II : Ecoulements parallèles instationnaires

4.0 Premier problème de Stokes

(Exercice préparatoire ; correction sur le site web du cours)

On s'intéresse à la situation vue en cours dans laquelle un milieu fluide visqueux semi-infini, initialement au repos, est mis en mouvement par une paroi située en $x = 0$ se déplaçant à vitesse constante U_1 à partir de $t = 0$. Le profil de vitesse verticale $v(x, t)$ évolue alors au cours du temps suivant une loi typique de diffusion instationnaire dont la dérivation est l'objet de cet exercice.

On va rechercher une solution dite *auto-semblable*, ou *auto-similaire*, dont on va justifier la forme en appliquant la méthode de l'analyse dimensionnelle vue au chapitre 1.

1. Ecrire le problème mathématique (équation différentielle, conditions limites, condition initiale) vérifié par $v(x, t)$.
2. En appliquant la méthode des unités intrinsèques au problème mathématique, montrez que la solution du problème peut être recherchée sous la forme $v(x, t) = \frac{x}{t} f(\xi_1, \xi_2)$ avec $\xi_1 = \frac{\nu t}{x^2}$ et $\xi_2 = \frac{U_1 t}{x}$.
3. Justifiez que la solution $v(x, t)$ est nécessairement proportionnelle à U_1 . En déduire que la solution peut finalement être recherchée sous la forme

$$v(x, t) = U_1 f(x/\sqrt{\nu t}) = U_1 f(\eta), \quad (3)$$

où $\eta = x/\sqrt{\nu t}$ est appelée *variable de similitude* du problème.

4. En injectant le changement de variables (3) dans l'équation du problème et dans les conditions limites et initiales associées, montrer que le problème à résoudre s'écrit

$$f''(\eta) + \frac{1}{2}\eta f'(\eta) = 0, \quad \text{avec } f(0) = 1 \text{ et } f(\eta \rightarrow \infty) = 0. \quad (4)$$

où le prime ' désigne la dérivée par rapport à la variable η .

5. Résoudre l'équation pour $g(\eta) = f'(\eta)$ puis montrer que $f(\eta) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right)$
où la *fonction d'erreur* erf est définie par

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^{*2}} dx^*,$$

6. En déduire l'expression de la solution $v(x, t)$ et tracer avec Python ou Matlab le profil de vitesse $v(x, t)$ pour différents instants t (on prendra $\nu = 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$; $U_1 = 1 \text{ m/s}$).
7. Déterminer l'expression du vecteur contrainte pariétale $\vec{\tau}_p(t)$, c'est-à-dire la contrainte à la paroi. On notera μ la viscosité dynamique du fluide (Pa.s).

4.1 Ecoulement au voisinage d'une paroi oscillante (second problème de Stokes)

On considère un fluide de viscosité cinématique ν occupant un demi-espace limité par une plaque plane animée d'un mouvement oscillant sinusoïdal avec la vitesse $U \cos \omega t$, parallèlement à elle-même ("deuxième problème de Stokes"). L'objectif de l'exercice est de retrouver la loi $u(y, t)$ décrivant la structure de l'écoulement (cf. tableau "solutions exactes" dans le formulaire).

1. Précisez l'équation aux dérivées partielles ainsi que les conditions limites vérifiées par $u(y, t)$
2. Résoudre le problème en régime périodique établi à l'aide de la méthode de la variable complexe.
3. Déduisez-en la contrainte visqueuse exercée par le fluide sur la paroi, et montrez que celle-ci est donnée par la loi suivante :

$$\tau_p = -\frac{\mu U \sqrt{2}}{\delta} \cos(\omega t + \pi/4) \quad \text{avec } \delta = \sqrt{2\nu/\omega}$$

4. * Que vaut la vorticité dans l'écoulement ? montrez que la vorticité à la paroi est directement reliée à la contrainte pariétale.

4.2 Rythmes cardiaques (préparation au TP numérique)

Outre une différence de pression moyenne, le cœur qui bat impose une variation périodique du gradient de pression ce qui conduit à un écoulement pulsé dans les vaisseaux sanguins. L'objectif de cet exercice est de caractériser ce type d'écoulement en particulier dans les limites des basses fréquences (organisme au repos) et hautes fréquences (activité cardiaque intense).

Considérons un écoulement plan entre deux plaques planes distantes de $2h$ généré par un gradient de pression sinusoïdal à pulsation ω fixée :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = K \cos \omega t.$$

1. Dans l'hypothèse d'un écoulement plan parallèle, montrer que la vitesse horizontale $u(y, t)$ vérifie l'équation

$$\underbrace{\rho \frac{\partial u}{\partial t}}_{[I]} = \underbrace{-K \cos \omega t}_{[P]} + \underbrace{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{[V]} \quad (5)$$

2. Comparer l'ordre de grandeur des termes $[I]$ et $[V]$ dans l'équation précédente. Montrez que le rapport de ces deux termes fait apparaître le nombre de Stokes (ou nombre de Womersley) $St = \frac{\omega h^2}{\nu}$.
3. Dans l'hypothèse $St \ll 1$, justifiez que l'écoulement correspond à chaque instant à l'écoulement de Poiseuille plan (régime quasi-statique).
4. Dans l'hypothèse $St \gg 1$, l'analyse des ordres de grandeur suggère qu'on peut dans une première approximation négliger le terme visqueux. Quelle est alors la solution du problème ? celle-ci est-elle valide dans la totalité du domaine ?
5. Toujours dans le cas $St \gg 1$, justifiez qu'il existe une *couche limite* dans laquelle le terme visqueux ne peut être négligé. Quelle est l'épaisseur de cette couche limite ?
6. Dans le cas général ($St = \mathcal{O}(1)$), montrez que la solution du problème **en régime établi** peut se mettre sous la forme suivante :

$$u(y, t) = \text{Re} \{ \underline{U}(y) e^{i\omega t} \}.$$

Avec

$$\underline{U}(y) = \frac{iK}{\rho\omega} \left\{ 1 - \frac{\cosh[y(1+i)\sqrt{\omega/2\nu}]}{\cosh[h(1+i)\sqrt{\omega/2\nu}]} \right\} \quad (6)$$

7. Etudiez le comportement de l'expression précédente dans les limites $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow \infty$, et montrez que l'on retrouve bien les prédictions obtenues précédemment dans les cas $St \ll 1$ et $St \gg 1$.
8. Évaluez la force de frottement exercée sur les parois du tube, et montrez qu'elle peut se mettre sous la forme

$$F_x(t) = \text{Re} \{ \underline{F}_x e^{i\omega t} \}, \quad \text{avec } \underline{F}_x = \frac{2(1-i)\mu K}{\omega\sqrt{2\nu/\omega}} \tanh \left[\frac{(1+i)h}{\sqrt{2\nu/\omega}} \right].$$

9. Que devient l'expression précédente dans les limites asymptotiques $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow \infty$? Commentez physiquement.

4.X Comportement visco-élastique ; modèles de Maxwell et de Kelvin-Voigt

On étudie le comportement d'un fluide obéissant à une loi de comportement *visco-élastique*, dans le cas où ce fluide est dans un canal plan de largeur H situé entre deux plaques de surface S . La plaque inférieure (à la position $y = 0$) est maintenue fixe. La plaque supérieure (à la position $y = H$) exerce sur le fluide une force $\vec{F} = F_w(t)\vec{e}_x$. On note F_0 l'ordre de grandeur de la force $F_w(t)$ et T l'échelle de temps caractéristique des variations de cette fonction. Aucune autre force n'est exercée sur le fluide.

A. Description MMC

Selon les conventions du cours de MMC, on définit le champ de déplacement (exprimé en coordonnées Lagrangiennes) $\vec{U}(\vec{X}, t)$ et le champ de vitesse (exprimé en coordonnées Eulériennes) $\vec{u}(\vec{x}, t)$.

Pour un mouvement de type *cisaillement plan*, seule la composante axiale de ces deux champs est non nulle, et dépend de la coordonnée transverse, c.a.d : $\vec{U}(\vec{X}, t) = [U(Y, t), 0, 0]$ et $\vec{u}(\vec{x}, t) = [u(y, t), 0, 0]$.

1. Justifiez qu'on a $u = \partial U / \partial t$, à la fois dans le formalisme Lagrangien et dans le formalisme Eulérien.
2. Donnez l'expression du tenseur des déformations $\vec{\epsilon} = (\vec{C} - \vec{1})/2$ et montrez que celui-ci vérifie $\vec{\epsilon} = \left(\text{grad}(\vec{U}) + [\text{grad}(\vec{U})]^T \right) / 2$, quelle que soit l'amplitude des déformations.
3. Donnez l'expression du tenseur des taux de déformations $\vec{D}$ et justifiez qu'on a $\vec{D} = \partial \vec{\epsilon} / \partial t$.

B. Loi de comportement de Maxwell

Le modèle du *fluide visco-élastique* de Maxwell est défini par la loi rhéologique suivante :

$$\vec{D} = \frac{1}{2\mu} \vec{\tau} + \frac{1}{2G} \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial t}$$

4. Estimez l'ordre de grandeur des deux termes du membre de droite dans cette expression. Montrez que le rapport de ces ordres de grandeur est donné par le *Nombre de Déborah*³ défini par

$$De = \frac{GT}{\mu}$$

5. Que devient la loi de comportement, respectivement dans les limites $De \gg 1$ et $De \ll 1$? Interprétez ces deux limites.
6. Montrez que dans le problème est gouverné par les deux e.d.p couplées suivantes :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} = -\frac{G}{\mu} \tau_{xy} + G \frac{\partial u}{\partial y}.$$

C. Solution dans le cas d'un mouvement oscillant

On considère maintenant le cas où la force exercée est oscillante en temps, c.a.d. $F_w = F_0 \cos(\omega t)$ où ω est la pulsation ; l'échelle de temps caractéristique T est dans ce cas la période $T = 2\pi/\omega$.

On cherche à résoudre le problème à l'aide de la méthode de la variable complexe, qui consiste à chercher la solution sous la forme $u(y, t) = \text{Re}[\underline{u}(y)e^{i\omega t}]$; $\tau_{xy}(y, t) = \text{Re}[\underline{\tau}(y)e^{i\omega t}]$.

7. Montrez que la fonction $\underline{u}(y)$ vérifie l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial y^2} = \beta^2 \underline{u}, \quad \text{avec} \quad \beta^2 = i\omega\rho \left(\frac{1}{\mu} + \frac{i\omega}{G} \right)$$

8. Résoudre cette équation et donnez la loi $u(y, t)$ du mouvement de la plaque en fonction de l'amplitude F_0 du forçage et des autres paramètres du problème.
9. Que devient cette expression dans les limites respectives $G \rightarrow 0$ et $\mu \rightarrow 0$? Interprétez physiquement.

D. Loi de comportement de Kelvin-Voigt

Le modèle de Kelvin-Voigt est défini par la loi rhéologique suivante :

$$\vec{\tau} = 2\mu \vec{D} + 2G\vec{\epsilon}$$

10. Que devient cette loi de comportement, respectivement dans les limites $De \gg 1$ et $De \ll 1$? Interprétez ces deux limites. Comparez au cas précédent.
11. On parle de *solide visco-élastique de Kelvin-Voigt* par opposition au *fluide visco-élastique de Maxwell*. Expliquez cette différence.

3. Contrairement à la plupart des nombres sans dimensions utilisés en mécanique, le nombre de Déborah n'est pas baptisé en hommage à un scientifique mais en référence à un chant de la prophétesse Déborah rapporté dans le *Livre des Juges* de la bible hébraïque (ou ancien testament chrétien) : "Dieu est éternel, devant lui les montagnes coulent".

5 Ecoulements visqueux III : Ecoulements rampants

5.0 Amortisseur hydraulique

(Exercice préparatoire ; correction sur le site web du cours)

On considère un amortisseur constitué d'un piston de rayon R et de longueur L couissant dans un cylindre de rayon $R + a$. Ce cylindre est rempli d'une huile de viscosité dynamique μ .

On veut déterminer la relation entre la force F appliquée sur le piston et sa vitesse V par rapport au cylindre. Le fluide dans les deux chambres supérieure et inférieure au piston sera considéré au repos. L'écoulement dans l'interstice (le jeu) entre les parois latérales du piston et du cylindre, est visqueux (newtonien), stationnaire et établi. On considérera que les pressions p_i et p_a dans les chambres inférieure et supérieure sont uniformes, et que la contribution hydrostatique, d'ordre $\rho g L$, est négligeable devant $p_i - p_a$.

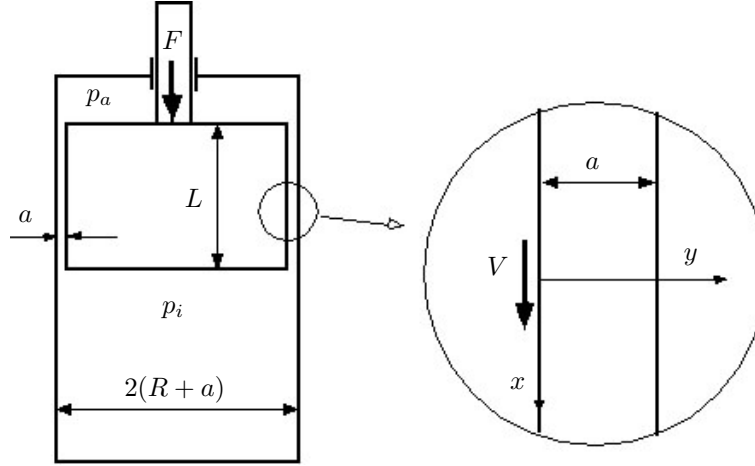


FIGURE 1 – Schéma de l'amortisseur hydraulique.

1. On suppose un écoulement parallèle stationnaire décrit en coordonnées cylindriques par $\vec{u} = u(r)\vec{e}_x$ et un champ de pression $p(x)$. A partir des équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques (Formulaire, section D.2), Ecrire l'équation différentielle vérifiée par $u(r)$.
2. Par analyse des ordres de grandeurs des termes de l'équation, montrez que si $a \ll R$ le terme de courbure apparaissant dans la partie visqueuse peut être négligé, et qu'après le changement de variable $y = r - R$ l'équation se simplifie en :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Qu'en déduit-on sur la pression et son gradient suivant x ?

3. Établir l'expression du profil de vitesse $u(y)$ et montrer qu'il correspond à la somme d'un écoulement de Poiseuille proportionnel à $-\partial p/\partial x$ et d'un écoulement de Couette proportionnel à V .
4. Calculez le débit de volume (en m^3/s) à travers l'interstice. On distinguera la contribution Q_p associée à l'écoulement de Poiseuille et la contribution Q_c associée à l'écoulement de Couette.
5. Montrer que le débit de volume (en m^3/s) chassé par le piston est égal à $Q = \pi R^2 V$.
6. En déduire que le gradient de pression est donné (à l'ordre dominant) par $(p_i - p_a)/L = 6\mu R V/a^3$.
7. Montrez que la force exercée sur le piston se compose de trois termes, notés respectivement F_p (résultante des efforts de pression), $F_{v,c}$ (résultante des contraintes visqueuses associées à l'écoulement de Couette), et $F_{v,p}$ (résultante des contraintes visqueuses associées à l'écoulement de Poiseuille). Exprimez F_p , $F_{v,c}$ et $F_{v,p}$ en fonction des données du problème.
8. Comparez l'ordre de grandeur de ces trois forces, et montrez qu'à l'ordre dominant la force totale a pour expression $F = 6\pi\mu L V \frac{R^3}{a^3}$.
9. Application : pour un piston de dimensions $R = 20$ mm, $L = 20$ mm, $a = 0.1$ mm, rempli d'huile de viscosité dynamique $\mu = 0.1$ Pa.s., quelle force faut-il appliquer pour imprimer une vitesse de 1 cm/s au piston ? L'écoulement est-il laminaire ?

5.1 L'expérience de la goutte de poix

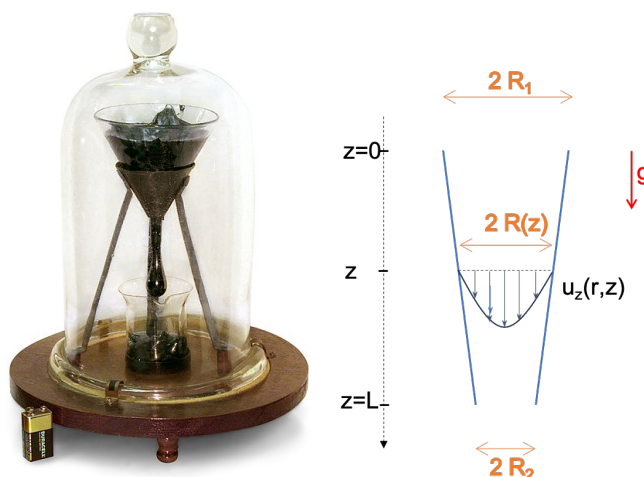


FIGURE 2 – Expérience de la goutte de Poix : (a) photo de l'expérience en cours depuis 1927 à l'université du Queensland (Australie) ; (b) schéma de la configuration modèle étudiée dans ce problème.

L'expérience de la goutte de poix est une expérience scientifique de longue durée destinée à observer l'écoulement d'un fragment de poix sur de nombreuses années. Bien que d'apparence solide, la poix (autre nom donné au goudron) est en réalité un liquide très visqueux (supposé Newtonien), susceptible de s'écouler très lentement. La figure 1(a) ci-dessus montre une photo de l'expérience en cours depuis 1927 à l'université du Queensland (Australie), dans laquelle la poix s'écoule (extrêmement lentement) dans un entonnoir. En presque un siècle d'observation, 9 gouttes de poix se sont détachées. Cette expérience a valu à ses auteurs le prix Ig-Nobel (parodie du prix Nobel) en 2005, au titre de l'expérience la plus longue du monde.

Dans ce problème on va considérer une version modélisée de l'écoulement en considérant une portion d'entonnoir conique de hauteur H , et de rayons R_1 (en entrée) et R_2 en sortie, comme représenté sur la figure 1(b). L'écoulement est décrit par les fonctions $u_z(r, z)$, $u_r(r, z)$, et $p(r, z)$, pour la vitesse axiale, la vitesse radiale et la pression. On note U et V les échelles de vitesse axiale et radiale, et $Re = UR_2/\nu$ le nombre de Reynolds basé sur l'échelle de vitesse axiale.

A. Relation entre débit et viscosité par la théorie de la lubrification

Dans cette première section on fera l'hypothèse d'une géométrie quasi-parallèle, c.a.d. qu'on notera $\epsilon = R_2/L$ le rapport des échelles de longueur transverse et axiale, et qu'on supposera que $\epsilon \ll 1$ afin de pouvoir simplifier les équations en conséquence. On suppose également le fluide Newtonien.

On pourra utiliser tous les formules données dans le formulaire, section D.2 (coordonnées cylindriques).

1. Ecrire l'équation de continuité. Par application du principe de moindre dégénérescence, montrez que l'échelle de vitesse transverse vérifie $V = \epsilon U$.
2. Montrez que sous des hypothèses que l'on précisera, la composante axiale de l'équation de Navier-Stokes se réduit à

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = 0.$$

3. Après avoir rappelé les conditions limites pour la vitesse u_z sur les parois du canal, montrez que l'écoulement est localement donné par un profil parabolique ("Poiseuille cylindrique") dont vous préciserez l'expression.
4. On note Q_m le débit de masse (en kg/s) à travers l'entonnoir. Montrez que celui-ci est relié au gradient de pression local par l'expression suivante :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g - \frac{8\mu Q_m}{\pi \rho R(z)^4}$$

5. En supposant que l'entrée et la sortie de l'entonnoir sont à la pression atmosphérique (c.a.d. $p(z = L) = p(z = 0) = p_a$), en déduire la relation suivante :

$$Q_m = \frac{3\pi\rho g}{8\nu} \times \frac{R_1 - R_2}{(R_2^{-3} - R_1^{-3})}$$

On pourra utiliser l'identité suivante : $\int_0^L (1 + \alpha z)^{-4} dz = \frac{(1 + \alpha L)^{-3} - 1}{-3\alpha}$

B. Application : Estimation de la viscosité de la poix.

Dans la suite on revient à l'expérience de la goutte de poix, dans laquelle les dimensions de l'entonnoir sont $L = 20\text{cm}$, $R_1 = 10\text{cm}$, $R_2 = 2\text{cm}$. La masse volumique de la poix est $\rho = 980\text{kg/m}^3 \equiv 0.98\text{g/cm}^3$ et l'accélération de pesanteur est $g = 9.81\text{m/s}^2$. Bien que l'hypothèse $\epsilon = R_2/L \ll 1$ ne soit pas vérifiée, on supposera que les résultats de la section précédente restent valides en première approximation.

6. En considérant que 9 gouttes se sont détachées entre 1930 et 2014, et en supposant que celles-ci sont de forme sphérique et de rayon R_2 , calculez le débit de masse Q_m . Donnez sa valeur (en kg/s ainsi qu'en grammes par siècle).
7. En déduire une estimation de la viscosité cinématique ν de la poix. De combien d'ordres de grandeur diffère-t-elle par rapport à celle de l'eau ?
8. Justifiez que la vitesse moyenne à la sortie de l'entonnoir vaut $U = Q_m/(\rho\pi R_2^2)$. Donnez sa valeur (en m/s ainsi qu'en cm par siècle).
9. Donnez la valeur du nombre de Reynolds basé sur la vitesse moyenne en sortie et le diamètre en sortie. Que peut-on en conclure concernant la validité de la théorie de la section précédente ?

5.2 Drainage entre deux disques rapprochés

Deux disques circulaires plans de rayon $R = 5\text{ cm}$ sont disposés parallèlement (fig. 3) l'un au-dessus de l'autre. Dans l'espace entre les disques se trouve une huile de viscosité dynamique $\mu = 6.26\text{ Pa}\cdot\text{s}$ et de masse volumique $\rho = 1230\text{ kg/m}^3$. On considère que l'épaisseur de fluide h entre les deux disques reste très petite devant le rayon R : $h \ll R$. L'épaisseur h_0 à l'instant initial ($t = 0$) est égale à $h_0 = 0,5\text{ cm}$. La pression à l'extérieur des disques correspond à la pression atmosphérique P_a .

La couche de fluide étant mince et le problème axisymétrique, on considère que la pression ne dépend ni de z ni de l'angle azimutal θ , soit $p = p(r, t)$, et on cherche un champ de vitesse s'écrivant : $\mathbf{u} = u_r(r, z, t)\mathbf{e}_r + u_z(r, z, t)\mathbf{e}_z$.

On exerce une force $\mathbf{F} = F\mathbf{e}_z$ sur le disque supérieur afin de chasser latéralement le fluide. Cette force impose au disque supérieur une vitesse $\mathbf{U} = U\mathbf{e}_z$, le disque inférieur restant fixe.

Le but de l'exercice est de déterminer l'intensité $F(t)$ de la force qu'il faut exercer pour maintenir constante la vitesse $U = 0,5\text{ mm/s}$ du disque supérieur.

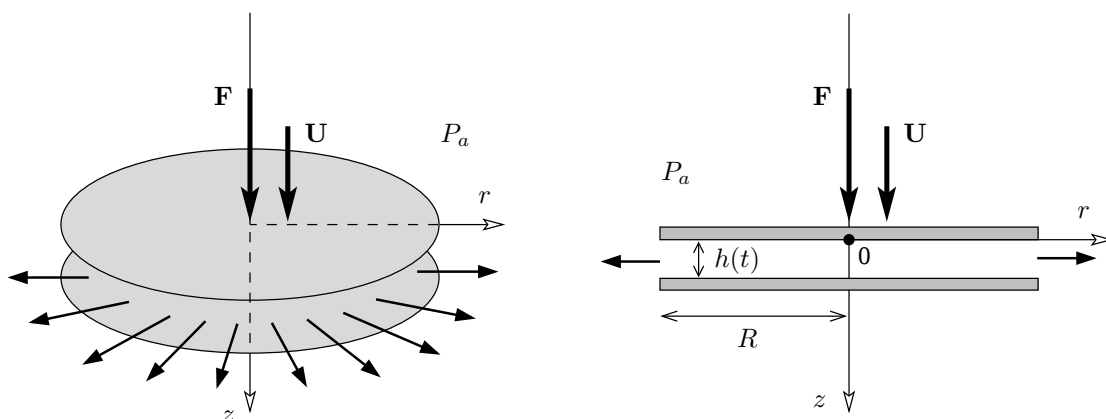


FIGURE 3 – Écoulement visqueux entre deux disques.

Les relations ci-dessous donnent, en coordonnées cylindriques (r, θ, z) , la composante radiale de l'équation du mouvement (7) et l'équation d'incompressibilité (8) :

$$\rho \left[\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right], \quad (7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (8)$$

1. (a) En choisissant U , R et $T = R/U$ respectivement comme échelles caractéristiques de vitesse, de longueur et de temps, calculer la valeur du nombre de Reynolds et du nombre de Stokes pour cet écoulement. Commenter.
- (b) Montrer que l'équation du mouvement peut se simplifier sous la forme :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right]. \quad (9)$$

- (c) On cherche à simplifier davantage l'équation ci-dessus. En choisissant comme échelles de longueur h suivant z , et R suivant r , pour estimer l'ordre de grandeur des dérivées partielles, et sur la base de l'hypothèse simplificatrice $h \ll R$, simplifier le terme de droite de l'équation (9). A l'aide des conditions aux limites (adhérence aux parois), en déduire l'expression de la vitesse radiale u_r en fonction du gradient radial de pression :

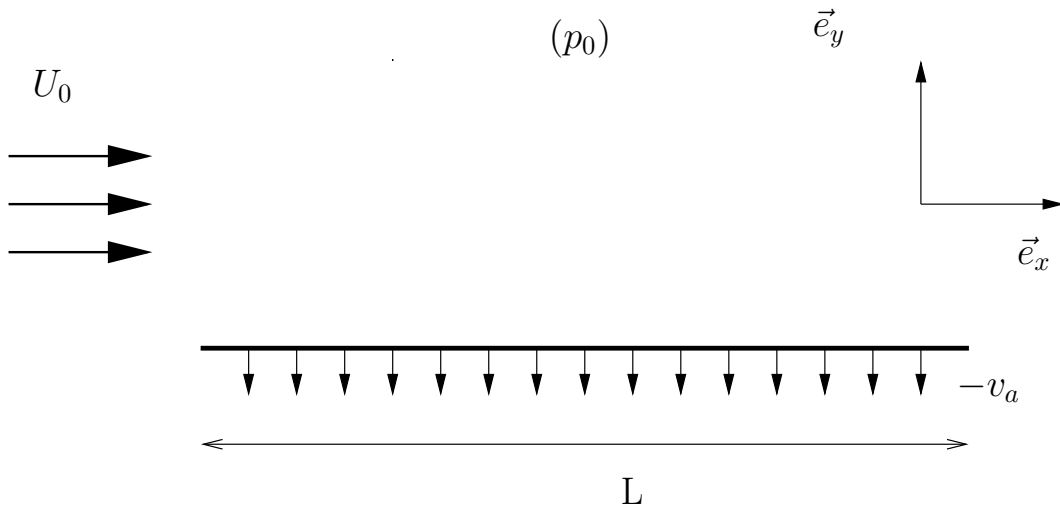
$$u_r(r, z, t) = \frac{1}{2\mu} z [z - h(t)] \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (10)$$

2. (a) En injectant cette expression dans l'équation d'incompressibilité (8), déterminer $u_z(r, z, t)$ en fonction de μ , h , $\partial p / \partial r$ et $\partial^2 p / \partial r^2$.
- (b) A l'aide des conditions aux limites sur u_z en $z = 0$ et $z = h(t)$, en déduire l'équation différentielle que doit vérifier p .
- (c) Montrer alors que la pression au sein du fluide a pour expression :

$$p(r, t) = P_a + \frac{3\mu U}{h(t)^3} (R^2 - r^2). \quad (11)$$

3. (a) Déterminer le module F de la force pressante nécessaire pour maintenir la vitesse U .
- (b) Donner l'expression de $h(t)$ en fonction de U et h_0 .
- (c) Tracer et commenter la courbe $F(t)$.
- (d) Sachant que le disque supérieur schématise le piston d'un vérin qui admet pour pression maximale $P_m = 10^7$ Pa, déterminer l'épaisseur minimale h_m de fluide que l'on ne peut éliminer en maintenant la vitesse U , et le temps t_m nécessaire pour effectuer cette vidange partielle de l'interdisque. Faire l'application numérique.

5.3 Aspiration d'une couche limite



Dans les écoulements à grands nombres de Reynolds caractéristiques de l'aérodynamique, l'écoulement autour d'obstacles est caractérisé par la présence de couches limites. Dans certains cas ces couches limites peuvent être affectées par un phénomène de décollement qui perturbe grandement les écoulements. Une façon d'éviter ces effets consiste à aspirer la couche limite à travers une paroi poreuse.

Dans cet exercice on considère une plaque plane disposée parallèlement à l'écoulement. Loin de la plaque (en $y \rightarrow \infty$), la composante axiale de vitesse vaut U_0 , et la pression est uniforme avec la valeur $p = p_a$. A la paroi de la plaque, la vitesse vaut $\vec{u} = -v_a \vec{e}_y$, (avec $v_a > 0$).

1. Ecrire les équations de Navier-Stokes et de continuité dans le cas général d'un écoulement bidimensionnel (de la forme $\vec{u} = u(x, y, t)\vec{e}_x + v(x, y, t)\vec{e}_y$) et incompressible, en négligeant la gravité.
2. Simplifiez les équations précédentes pour le cas particulier d'un écoulement stationnaire et invariant dans la direction axiale, c'est à dire de la forme $\vec{u} = u(y)\vec{e}_x + v(y)\vec{e}_y$.
3. Montrez que $v(y)$ et la pression $p(x, y)$ sont uniformes.
4. Montrez que la vitesse axiale est solution de l'équation différentielle :

$$v_a \frac{\partial u}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Avec des conditions limites en $y = 0$ et $y \rightarrow +\infty$ que vous préciserez.

5. Donnez la solution $u(y)$ du profil de vitesse.
6. Calculez l'épaisseur de la couche limite δ , définie comme la position à laquelle $u(y = \delta) = 0.99U_0$.
7. Calculez la contrainte pariétale $\tau_{xy}(y = 0)$. En déduire la force exercée sur une plaque plane (supposée de longueur L et de largeur b .)
8. Faites les applications numériques pour les deux questions précédentes, avec les données $U_0 = 10m/s$, $v_a = 0.1m/s$, $L = b = 1m$, le fluide étant de l'air à pression et température ambiante.

5.X Ecoulement de Stokes autour d'une sphère

Dans un article majeur paru en 1846, G.G. Stokes a établi (entre autres) la solution de l'écoulement d'un fluide autour d'une sphère, dans le régime dominé par la viscosité (maintenant appelé régime de Stokes). En décrivant les champs de vitesse et de pression en coordonnées sphériques, c.a.d. $\vec{u} = u_r(r, \theta)\vec{e}_r + u_\theta(r, \theta)\vec{e}_\theta$ et $p = p(r, \theta)$, la Solution de Stokes s'écrit :

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta) &= U \cos \theta \left[1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3} \right] \\ u_\theta(r, \theta) &= -U \sin \theta \left[1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right] \\ p(r, \theta) &= p_\infty - \frac{3}{2}\mu U a \frac{\cos \theta}{r^2} \end{aligned}$$

Le but de cet exercice est de vérifier que cette expression est bien solution des équations du mouvement, et de calculer la force exercée sur la sphère.

(On néglige la gravité pour simplifier).

1. A partir du formulaire (section D.3), écrivez l'équation de continuité sous sa forme la plus simple.
2. Vérifiez que la solution de Stokes est bien solution de cette équation de continuité.
3. Toujours à partir du formulaire, écrivez sous leur forme la plus simple les projections dans les directions r et θ de l'équation de l'équation de (Navier-)Stokes.
4. Montrez que la solution de Stokes est bien solution de ces équations.
5. Donnez l'expression des contraintes visqueuses à la surface de la sphère $\tau_{rr}(r = a, \theta)$ et $\tau_{r\theta}(r = a, \theta)$.
6. En déduire la force exercée par le fluide sur la sphère.

6 Ecoulements en conduite et couches limites

6.0 Dimensionnement d'un chauffe-eau solaire

(Exercice préparatoire ; correction sur le site web du cours)

On souhaite dimensionner une pompe pour faire fonctionner un chauffe-eau solaire.

Le circuit (simplifié) est constitué d'un tuyau de cuivre de diamètre intérieur $d = 8\text{mm}$, rugosité $k = 1.5\mu\text{m}$, longueur totale $L = 60\text{m}$, comportant 20 coudes 90° standard et 2 vannes globe ouvertes.

Le fluide est un mélange eau-glycérol (de masse volumique 980kg/m^3 et viscosité cinématique $\nu = 2 \cdot 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$).

1. Le débit attendu est $Q = 250\ell/\text{h}$. Calculez la perte de charge totale, et en déduire la puissance de la pompe nécessaire pour faire fonctionner le circuit.
2. On dispose d'une pompe de puissance 30 Watts. Quel est alors le débit Q (en ℓ/h) dans le circuit ?

6.1 Ecoulement dans une galerie

On considère l'écoulement dans une galerie horizontale d'aménagement hydroélectrique, de diamètre $D = 4\text{m}$ et de longueur $L = 16\text{km}$, entre la base d'une retenue d'eau, située à la profondeur $H = 100\text{m}$ sous la surface libre, et un réservoir qu'on considèrera, pour simplifier, à la pression atmosphérique. Il s'agit ici de déterminer quel est le phénomène qui détermine la vitesse moyenne U de l'écoulement dans la galerie : l'inertie du fluide dans la retenue, ou la dissipation visqueuse dans la galerie (coefficient de perte de charge Λ , la dissipation dans la retenue est négligeable).

1. Montrer que si la longueur de la galerie est supérieure à une longueur critique $L_c(D, \Lambda)$, la vitesse est déterminée par la perte de charge. Cette condition est-elle vérifiée ici ?
2. En considérant que le régime d'écoulement est "hydrauliquement rugueux" ($Re > 10^5$), condition que l'on vérifiera *a posteriori*, déterminer la vitesse de l'écoulement dans la galerie. On rappelle que dans le régime rugueux, le coefficient de perte de charge ne dépend plus du nombre de Reynolds, et est donné par la formule de Colebrook simplifiée (encore appelée formule de Karman-Prandtl ou de Karman-Nikuradse) :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log_{10} \frac{3,71 D}{k},$$

où on prendra $k = 300\text{mm}$ pour la rugosité de la galerie.

3. La vitesse de l'écoulement est-elle peu sensible ou très sensible à la rugosité ? (On pourra évaluer la diminution relative de vitesse lorsque la rugosité est multipliée par 5, de 100 à 500 mm par exemple.)

6.2 Force de frottement sur une coque de sous-marin

On considère le sous-marin nucléaire "le Triomphant" avançant à une vitesse $U = 25\text{kts}$ (25 noeuds). La longueur est $L = 138\text{m}$, la surface mouillée vaut $S_m = 7500\text{m}^2$, et la carène est caractérisée par une rugosité $k = 2\text{mm}$. On note $\epsilon = k/L$.

1. En appliquant les principes de l'analyse dimensionnelle, montrez que la force de traînée est de la forme

$$T_f = \frac{1}{2} \rho U^2 S_m C_f(Re, \epsilon)$$

2. On réalise une expérience avec une maquette à l'échelle 1/50ème, caractérisée par une rugosité $k_m = 0.55\text{mm}$. Une expérience conduite à une vitesse $U = 1\text{m/s}$ a permis de mesurer une traînée $T_{f,m} = 9.53\text{N}$. En utilisant la méthode du facteur de forme et le diagramme du formulaire (section H), déduire le facteur de forme κ .
3. En déduire la force de traînée T_f sur le sous-marin, puis la puissance $\mathcal{P}$ dissipée par les frottements sur la carène.

6.3 Recherche d'un régime d'écoulement

Déterminer le régime d'écoulement (laminaire, turbulent lisse ou turbulent rugueux) et le coefficient de perte de charge Λ d'un écoulement d'eau ($\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ à 15°C) dans les deux cas suivants :

1. Tube de verre de diamètre $D = 2 \text{ cm}$ et de rugosité $k = 0,2 \mu\text{m}$, débit $Q_v = 0,6$ litre par seconde.
2. Tuyauterie de fonte de diamètre $D = 60 \text{ cm}$ et de rugosité $k = 0,3 \text{ mm}$, débit $Q_v = 0,85 \text{ m}^3/\text{s}$.

On rappelle qu'en écoulement turbulent, le coefficient de perte de charge est donné par la formule semi-empirique de Colebrook

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{k/D}{3,71} + \frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}} \right).$$

Une première estimation de λ peut être obtenue en ne retenant que le terme dominant dans l'argument du logarithme, en considérant que λ est très généralement compris entre 0,01 et 0,04. Une deuxième estimation peut être obtenue en insérant la première dans le logarithme, et ainsi de suite.

6.4 Ecoulement dans un oléoduc

On considère un écoulement d'huile dans un oléoduc horizontal de diamètre $D = 10 \text{ cm}$ et de longueur $L = 10 \text{ km}$. Le débit d'huile est $Q_v = 50 \text{ m}^3/\text{heure}$, sa densité est $\rho = 950 \text{ kg/m}^3$ et de viscosité dynamique $\mu = 0,2 \text{ Pa.s}$.

1. L'écoulement est-il laminaire ou turbulent ? Déterminer la perte de charge et le coefficient de perte de charge λ .
2. Déterminer la puissance dissipée dans la conduite (on pourra utiliser le théorème de l'énergie cinétique).
3. Pour limiter l'épaisseur et donc le coût de la conduite, on désire que la pression ne dépasse nulle part 5 MPa . Quelle solution peut-on proposer ?