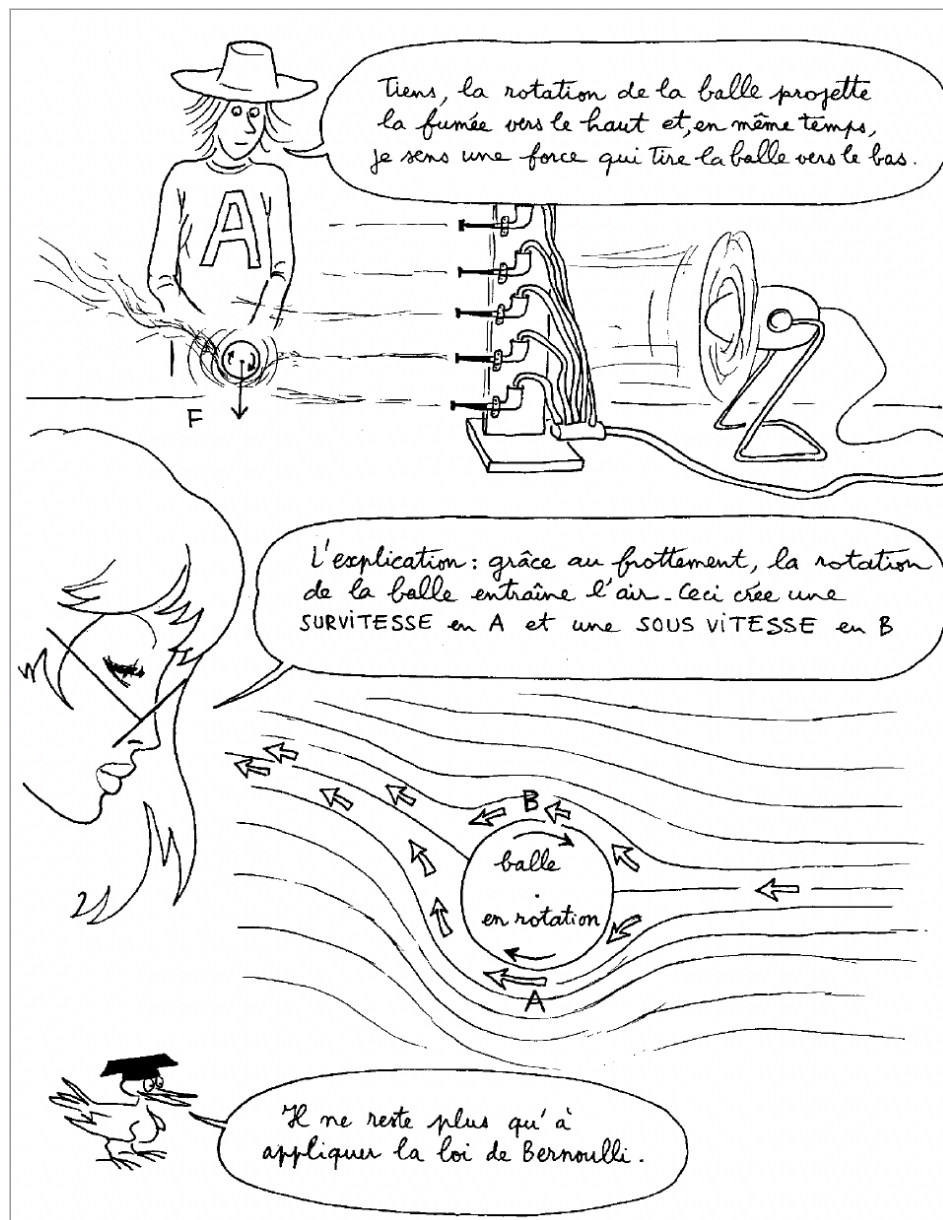


## Exercices et problèmes – Mécanique des fluides 2



Equipe pédagogique :  
D. Fabre, S. Maragou, G. Bardan, F. Moulin

# Table des matières

|                                                                                     |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>7 Cinématique</b>                                                                | <b>2</b>  |
| 7.0 Écoulements linéaires . . . . .                                                 | 2         |
| 7.1 Tourbillon de vidange . . . . .                                                 | 2         |
| 7.2 Écoulement instationnaire périodique . . . . .                                  | 4         |
| 7.3 Écoulement stationnaire accéléré dans une conduite . . . . .                    | 4         |
| 7.4 Écoulement bidimensionnel quadratique . . . . .                                 | 4         |
| <b>8 Ecoulements Inertiels I</b>                                                    | <b>6</b>  |
| 8.0 Perte de charge singulière a travers un élargissement brusque . . . . .         | 6         |
| 8.1 Déformation d'un écoulement à surface libre par un obstacle . . . . .           | 6         |
| A. Pente de la surface libre sans obstacle . . . . .                                | 6         |
| B. Déformation de la surface libre avec un obstacle immergé . . . . .               | 7         |
| 8.2 L'aspirisouffle . . . . .                                                       | 8         |
| 8.3 Le diffuseur de parfum . . . . .                                                | 9         |
| <b>9 Ecoulements Inertiels II</b>                                                   | <b>10</b> |
| 9.0 Traînée exercée sur un cylindre . . . . .                                       | 10        |
| 9.1 Déformation d'un écoulement à surface libre (suite de l'exercice 8.1) . . . . . | 10        |
| C. Bilan intégral autour du ressaut hydraulique stationnaire . . . . .              | 10        |
| 9.2 Ventilation d'un tunnel . . . . .                                               | 12        |
| 9.3 Ski nautique . . . . .                                                          | 13        |
| <b>10 Ecoulements potentiels</b>                                                    | <b>15</b> |
| 10.0 Écoulement potentiel stationnaire autour d'une sphère . . . . .                | 15        |
| 10.1 Écoulement autour d'un cylindre : effet Magnus . . . . .                       | 15        |
| A. Écoulement symétrique : paradoxe de d'Alembert . . . . .                         | 15        |
| B. Écoulement purement azimutal . . . . .                                           | 16        |
| C. Écoulement composite . . . . .                                                   | 16        |
| 10.2 Ascension d'une bulle parachute (d'après Davies & Taylor, 1950) * . . . . .    | 17        |
| <b>11 Acoustique et ondes de choc</b>                                               | <b>18</b> |
| 11.0 Etablissement des relations de saut pour un choc droit . . . . .               | 18        |
| 11.1 Acoustique des instruments à vent . . . . .                                    | 18        |
| 11.2 Tube de Pitot en écoulement supersonique . . . . .                             | 20        |
| <b>12 Ecoulements compressibles</b>                                                 | <b>21</b> |
| 12.0 Régimes d'écoulement dans une tuyère . . . . .                                 | 21        |
| 12.1 Écoulement transsonique autour d'une aile d'avion . . . . .                    | 21        |
| 12.2 Écoulement isentropique (CC3 2025) . . . . .                                   | 22        |
| 12.3 Fuite dans un réservoir sous pression (exam mai 2021) . . . . .                | 22        |
| A. Problème basse pression . . . . .                                                | 22        |
| B. Problème haute pression . . . . .                                                | 23        |
| C. Retour à la normale... . . . .                                                   | 23        |

## 7 Cinématique

### 7.0 Écoulements linéaires

(Exercice préparatoire ; correction sur le site web du cours)

#### A. Écoulement d'étirement pur

On considère l'écoulement bidimensionnel correspondant au champ de vitesse  $\vec{u}$  dont les composantes  $[u_x, u_y]$  dans la base  $[\vec{e}_x, \vec{e}_y]$  sont définies ainsi :

$$\begin{cases} u_x(x, y) &= \alpha y \\ u_y(x, y) &= \alpha x \end{cases}$$

1. Donnez l'expression du tenseur gradient des vitesses  $\bar{\bar{L}} = \text{grad}(\vec{u})$ . Déduisez-en la divergence  $\text{div}(\vec{u})$ , puis le tenseur des taux de déformation  $\bar{\bar{D}}$  et enfin le tenseur des taux de rotation  $\bar{\bar{R}}$ .
2. Après avoir justifié son existence, donnez l'expression de la fonction de courant  $\psi$  associée à cet écoulement. En déduire la nature géométrique des lignes de courant, et représentez graphiquement la structure de l'écoulement.
3. (Approche lagrangienne : ) Calculez la trajectoire  $[X(t), Y(t)]$  de la particule située initialement en  $(x, y) = [0, L]$ . Justifiez que le résultat est en accord avec le calcul des lignes de courant à la question précédente.

Pour la suite on introduit une base  $[\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}]$  pivoté d'un angle  $\theta$  par rapport à la base  $[\vec{e}_x, \vec{e}_y]$ , et on note  $[x', y']$  les coordonnées dans cette base. On note  $[u_{x'}, u_{y'}]$  les composantes du champ de vitesse dans cette base.

4. Exprimez  $u_{x'}$  et  $u_{y'}$  en fonction de  $x'$  et  $y'$ .
5. Donnez l'expression du tenseur du gradient des vitesses (que l'on notera  $\bar{\bar{L}}_{(x'y')}$ ) dans cette nouvelle base, et montrez que celui-ci est diagonal pour  $\theta = \pi/4$ .
6. Dans le cas  $\theta = \pi/4$ , donnez l'expression de la fonction de courant  $\psi(x', y')$  décrivant cet écoulement dans ces nouveaux axes. En déduire la nature géométrique des lignes de courant, et représentez la structure de l'écoulement.

#### B. Généralisation

On considère maintenant l'écoulement plan défini par le champ de vitesse :

$$\begin{cases} u(x, y) &= ax + by \\ v(x, y) &= cx + dy \end{cases} \quad \text{où } a, b, c \text{ et } d \text{ sont des constantes.}$$

7. Donnez l'expression du tenseur gradient des vitesses  $\bar{\bar{L}} = \text{grad}(\vec{u})$ . Déduisez-en la divergence  $\text{div}(\vec{u})$ , puis le tenseur des taux de déformation  $\bar{\bar{D}}$  et enfin le tenseur des taux de rotation  $\bar{\bar{R}}$  ainsi que la vorticité  $\vec{\omega} = \text{rot}(\vec{u})$ .

A quelle condition l'écoulement est-il incompressible ? A quelle condition est-il irrotationnel ?

8. A l'aide du programme `Ecoulement2.py` disponible sur le site web du cours, tracez la structure de l'écoulement dans les cas suivants :

- (i)  $b = c = 1, a = d = 0$ .
- (ii)  $a = 1, b = c = 0, d = -1$ .
- (iii)  $a = d = 1, b = c = 0$ .
- (iv)  $b = 1, c = -1, a = d = 0$ .
- (v)  $b = 1, a = c = d = 0$ .

A quoi correspondent respectivement chacun de ces cas ?

### 7.1 Tourbillon de vidange

On étudie un écoulement stationnaire, occupant un récipient cylindrique de rayon  $R_0$  et de hauteur  $H$ . L'alimentation du récipient se fait à travers la paroi extérieure (en  $r = R_0$ ) qui est poreuse. La surface supérieure du récipient (en  $z = 0$ ) est considérée comme une surface solide, et le fond du récipient (en  $z = +H$ ) est percé d'un trou de rayon  $a$  (notez que l'axe  $z$  est orienté vers le bas).

Le champ de vitesse est donné en coordonnées cylindriques par  $\vec{u} = u_r \vec{e}_r + u_\theta \vec{e}_\theta + u_z \vec{e}_z$ , avec les expressions suivantes :

$$\text{pour } r < a : \begin{cases} u_r = -\frac{Dr}{2\pi a^2} \\ u_\theta = \frac{\Gamma r}{2\pi a^2} \\ u_z = \frac{Dz}{\pi a^2} \end{cases} \quad \text{pour } r > a : \begin{cases} u_r = -\frac{D}{2\pi r} \\ u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \\ u_z = 0 \end{cases}$$

### Partie A : "Tourbillon de Rankine"

On considère tout d'abord l'écoulement plan correspondant à  $D = 0$ ,  $\Gamma > 0$ .

1. Donnez l'expression du tenseur des gradients de vitesse dans chacune des deux régions de l'écoulement. En déduire la divergence, la vorticité  $\vec{\omega}$  puis le tenseur des taux de déformations  $\bar{D}$ .
2. Représentez schématiquement les déformations d'un volume élémentaire  $dV = r d\theta dr dz$  situé dans le coeur ( $r < a$ ) puis dans la zone extérieure ( $r > a$ ). Vous pouvez utiliser le programme `Vidange_A.py` avec  $G = 1$ ,  $D = 0$ .
3. Après avoir justifié son existence, donnez l'expression de la fonction de courant  $\psi$  associée à cet écoulement. En déduire que les lignes de courant sont des cercles concentriques.
4. (question facultative) Reprendre l'étude à partir d'une description en coordonnées cartésiennes  $u_x(x, y)\vec{e}_x + u_y(x, y)\vec{e}_y$ .

### Partie B : "Ecoulement de vidange non tournant"

On considère maintenant l'écoulement à symétrie de révolution correspondant à  $D > 0$ ,  $\Gamma = 0$ .

5. Donnez l'expression du tenseur des gradients de vitesse. En déduire la divergence, la vorticité  $\vec{\omega}$  puis le tenseur des taux de déformations  $\bar{D}$ .
6. Représentez schématiquement les déformations d'un volume élémentaire  $dV = r d\theta dr dz$  situé dans la zone extérieure ( $r > a$ ) puis dans le coeur  $r < a$ ). Vous pouvez utiliser le programme `Vidange_B.py`.
7. Après avoir justifié son existence, donnez l'expression de la fonction de Stokes  $\Psi$  associée à cet écoulement. En déduire la géométrie des lignes de courant.
8. Calculez le flux volumique A travers la paroi latérale du cylindre ( $r = R_0$ ) puis à travers le fond du récipient ( $z = H$ ).

### Partie C : "Tourbillon de vidange"

On considère maintenant le cas général :  $D > 0$ ,  $\Gamma > 0$ .

9. Calculez la *trajectoire* (paramétrée sous la forme  $[R(t); \theta(t); Z(t)]$ ) d'une particule fluide située initialement à la position  $[R(0) = R_0, \theta(0) = \theta_0, Z(0) = Z_0]$ . Montrez que celle-ci est donnée par :

$$\text{pour } t < t_c : \begin{cases} R(t) = \sqrt{R_0^2 - \frac{Dt}{\pi}} \\ \theta(t) = \theta_0 - \frac{\Gamma}{2D} \left[ \ln \left( R_0^2 - \frac{Dt}{\pi} \right) - \ln(R_0^2) \right] \\ Z(t) = Z_0 \end{cases} \quad \text{pour } t > t_c : \begin{cases} R(t) = a \exp \left( -\frac{D(t - t_c)}{2\pi} \right) \\ \theta(t) = \theta_c + \frac{\Gamma}{2\pi} (t - t_c) \\ Z(t) = Z_0 + Z_0 \exp \left( \frac{D(t - t_c)}{\pi} \right) \end{cases}$$

Avec :

$$t_c = \frac{\pi(R_0^2 - a^2)}{D}; \quad \theta_c = \theta_0 - \frac{\Gamma}{D} [\ln(a) - \ln(R_0)].$$

10. Vérifiez que les projections dans un plan horizontal des trajectoires sont des spirales d'Archimède d'équation  $r \equiv e^{-\alpha\theta}$  et donnez le "pas" de la spirale  $\alpha$  en fonction de  $\Gamma$  et  $D$ .
11. Retrouvez ce résultat plus simplement en étudiant les *lignes de courant* de l'écoulement.

- Représentez schématiquement la forme des trajectoires (ou des lignes de courant) de l'écoulement tridimensionnel. Vous pouvez utiliser le programme `Vidange_C.py`.
- Reprendre toute l'étude à partir d'une description en coordonnées cartésiennes  $u_x(x, y)\vec{e}_x + u_y(x, y)\vec{e}_y$ .

## 7.2 Écoulement instationnaire périodique

On considère un écoulement bidimensionnel dont la vitesse est donnée sous forme eulérienne par :

$$\begin{cases} u_x(x, y, t) &= U_0 \cos \omega t, \\ u_y(x, y, t) &= U_0 \sin \omega t. \end{cases}$$

- Donnez la forme des lignes de courant en un instant  $t$  donné. Représentez le champ de vitesse pour 4 instants correspondant à  $t = 0$ ,  $t = T/4$ ,  $t = T/2$ , et  $t = 3T/4$ , où  $T = 2\pi/\omega$  est la période du cycle.
- On note  $\vec{X}(t; \vec{x}_0, t_0)$  la position lagrangienne, à l'instant  $t$ , de la particule fluide qui était située à la position  $\vec{x}_0$  à l'instant  $t_0$ .  
Calculez les composantes de  $\vec{X}(t; \vec{x}_0, t_0)$ , notées  $X(t; x_0, y_0, t_0)$  et  $Y(t; x_0, y_0, t_0)$ , où  $x_0$  et  $y_0$  sont les composantes de  $\vec{x}_0$ .
- Quelle est la forme des trajectoires? Représentez la trajectoire de 4 particules, correspondant respectivement à  $(x_0, y_0, t_0) = (0, 0, 0)$ ;  $(0, 0, T/4)$ ;  $(0, 0, T/2)$ ; et  $(0, 0, 3T/4)$ .
- \* Quelle est la forme des lignes d'émission? Représentez la ligne d'émission correspondant au point d'émission  $\vec{x}_0 = \vec{0}$ , en quatre instants, correspondant à  $t = 0$ ,  $t = T/4$ ,  $t = T/2$ , et  $t = 3T/4$ .

## 7.3 Écoulement stationnaire accéléré dans une conduite

On étudie l'écoulement dans une conduite rectiligne de section constante  $S$ . L'écoulement est mono-directionnel et stationnaire, et on pose  $\vec{u}(\vec{x}, t) = U(x)\vec{e}_x$ . L'écoulement subit une accélération dans la portion de conduite située entre  $x = 0$  et  $x = L$ . De part et d'autre de cette zone l'écoulement est uniforme. De manière plus précise, on suppose que le champ de vitesse est donné par la définition (eulérienne) suivante :

$$U(x) = \begin{cases} U_0 & \text{pour } x < 0; \\ U_0 + \alpha x & \text{pour } 0 < x < L; \\ U_1 & \text{pour } x > L, \text{ avec } U_1 = U_0 + \alpha L. \end{cases}$$

Cet écoulement modélise (très simplement) l'écoulement dans un turboréacteur.

- Calculez la divergence du champ de vitesse.
- On note  $X(t)$  la position lagrangienne de la particule fluide située à l'origine du repère à  $t_0 = 0$ . Calculez  $X(t)$ .
- Calculez la vitesse lagrangienne  $U(t)$  et l'accélération lagrangienne  $A(t)$  de cette particule fluide.
- Exprimez l'accélération en variables euleriennes. Montrez qu'on a bien  $A = \partial U / \partial t + U \partial U / \partial x$ .
- Donnez l'expression du débit massique à travers la conduite. En écrivant que ce dernier est constant, en déduire la loi eulerienne de masse volumique,  $\rho(x)$ .
- Donnez la loi lagrangienne de masse volumique,  $\rho(t)$ , de la particule fluide considérée précédemment.
- Calculez la dérivée particulaire de la masse volumique,  $d\rho/dt$ . Vérifiez que l'on a bien  $d\rho/dt + \rho \operatorname{div}(\vec{u}) = 0$ .

## 7.4 Ecoulement bidimensionnel quadratique

On considère l'écoulement bidimensionnel défini ainsi :

$$\begin{cases} u_x(x, y) &= x(1 - x) \\ u_y(x, y) &= -y(1 - 2x) \end{cases}$$

- Vérifiez que l'écoulement est à divergence nulle.
- Etudiez le signe de  $u_x$  et  $u_y$  en fonction de  $(x, y)$ .

3. Représentez graphiquement la structure de l'écoulement.

**On pourra adapter l'un des programmes Python disponibles pour traiter cet écoulement.**

4. Donnez l'expression de la fonction de courant décrivant cet écoulement.

## 8 Ecoulements Inertiels I

### 8.0 Perte de charge singulière a travers un élargissement brusque

(Exercice préparatoire ; correction sur le site web du cours)

On s'intéresse dans cet exercice à l'écoulement dans une conduite au passage d'un élargissement brusque d'une canalisation dont la section varie de  $S_1$  à  $S_2$  avec  $S_2 > S_1$ . L'écoulement en amont de l'élargissement a une vitesse  $u_1$  et une pression  $p_1$  supposées connues. On cherche à déterminer la vitesse  $u_2$  et la pression  $p_2$  en aval de l'élargissement (fig. 1a). On notera  $s = S_1/S_2$  le rapport des sections ( $s < 1$ ). On supposera que, bien que turbulent, l'écoulement est stationnaire en moyenne. Le fluide est homogène, de masse volumique  $\rho$  uniforme, et sans perte de généralité, on négligera la pesanteur. La paroi de la conduite est imperméable.

On considère un volume de contrôle  $\Omega$  comme représenté sur la figure, dont la frontière est  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_f$ ; ici  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont l'entrée et la sortie,  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  les parois latérales en amont et en aval, et  $\Sigma_f$  la surface frontale au niveau du raccord (d'aire  $S_2 - S_1$ ).

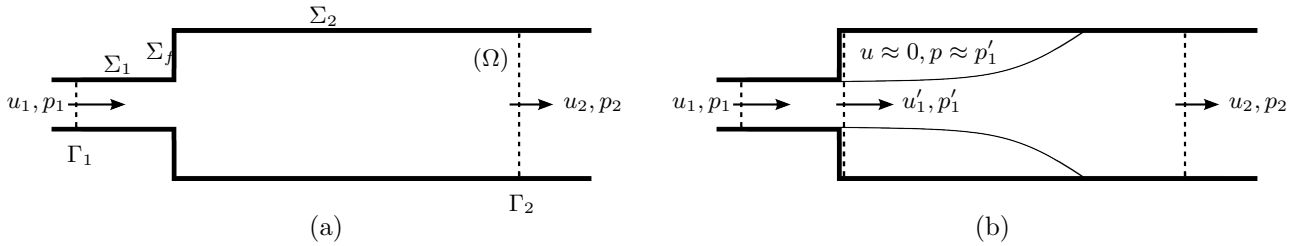


FIGURE 1 – Elargissement brusque dans une conduite : (a) schéma global et identification du volume de contrôle  $\Omega$  et des différentes parties de sa frontière, et (b) détail de l'écoulement décollé observé expérimentalement.

1. Ecrire le bilan intégral de masse, en déduire  $u_2$  en fonction de  $u_1$  et  $s = S_2/S_1$ .
2. Justifiez qu'immédiatement avant l'élargissement la vitesse est  $u'_1 \approx u_1$  et la pression  $p'_1 \approx p_1$ .
3. En vous basant sur les notions vues en cours, justifiez que la pression dans la zone de recirculation est uniforme et égale à  $p_1$ .
4. Ecrire le bilan intégral de quantité de mouvement.
5. A partir des relations précédentes déduire  $p_1 - p_2$  en fonction de  $u_1$  et  $s$ .
6. En déduire une expression de la perte de charge  $\Delta_1^2 = (p_1 + \rho u_1^2/2) - (p_2 + \rho u_2^2/2)$  puis du coefficient de perte de charge singulière défini par  $K = \frac{\Delta_1^2}{\frac{1}{2}\rho u_1^2}$ .
7. Que prédisent les relations précédentes dans le cas  $S_2 \gg S_1$  correspondant au cas où la canalisation débouche dans un récipient de grande dimension ? Comparez avec le résultat qu'on aurait si la dissipation pouvait être négligée. Expliquez physiquement.

### 8.1 Déformation d'un écoulement à surface libre par un obstacle

On considère un écoulement d'eau (masse volumique  $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$  et viscosité moléculaire  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ) dans une canal hydraulique horizontal de largeur  $W = 1 \text{ m}$  avec un débit volumique  $Q = 20 \text{ l s}^{-1}$ . Le canal fait  $20 \text{ m}$  de long, et on remonte une vanne à l'aval pour régler le niveau d'eau dans la zone de mesure située à la moitié du canal, en  $x = 10 \text{ m}$ . Le canal est en verre, avec une surface considérée comme lisse.

#### A. Pente de la surface libre sans obstacle

On impose une hauteur  $H = 10 \text{ cm}$  pour le tirant d'eau au niveau de la zone de mesure.

1. Calculer la vitesse débitante (vitesse moyenne) de l'écoulement, notée  $U_{deb}$ . En déduire la valeur du nombre de Reynolds  $Re$  pour cet écoulement. Justifier qu'on puisse considérer que l'écoulement est uniforme sur la hauteur.
2. Quelle est la distribution de pression  $P(z)$  au niveau de la zone de mesure ?

3. Calculer à partir du diagramme de Moody le coefficient de perte de charge linéaire pour cet écoulement, en considérant que le diamètre hydraulique  $D$  est tout simplement égal à deux fois le tirant d'eau  $H$ .
4. Calculer la différence de pression dans la direction longitudinale le long d'une ligne de courant sur une longueur de  $1\text{ m}$ .
5. Comme cette différence de pression dans la direction longitudinale est assurée par des profils de pression hydrostatiques dans la direction verticale, calculer la différence de hauteur d'eau sur  $1$  mètre de part et d'autre de la zone de mesure.
6. Pourquoi peut-on considérer que cette variation de hauteur d'eau est négligeable pour étudier localement l'interaction de l'écoulement avec un obstacle ?

## B. Déformation de la surface libre avec un obstacle immergé

On néglige dans ce qui suit le frottement sur la paroi et la petite pente de la surface libre associée discutée dans la sous-section précédente. On place au fond du canal un obstacle en forme de demi-cylindre de rayon  $R$ , dont le profil topographique est  $b(x)$ . Donc,  $b$  est maximal en  $x = 0$  choisi au centre du demi-cylindre et vaut  $b_{max} = R$ . On note  $h(x)$  le tirant d'eau, c'est-à-dire l'épaisseur de la veine d'eau qui passe au-dessus de la topographie  $b(x)$ . Autrement dit, l'altitude de la surface libre est donnée par  $h(x) + b(x)$ . On note également  $U_{deb}(x)$  la vitesse moyenne (débitante) de l'eau à la position  $x$ . La figure (2) présente le schéma correspondant.

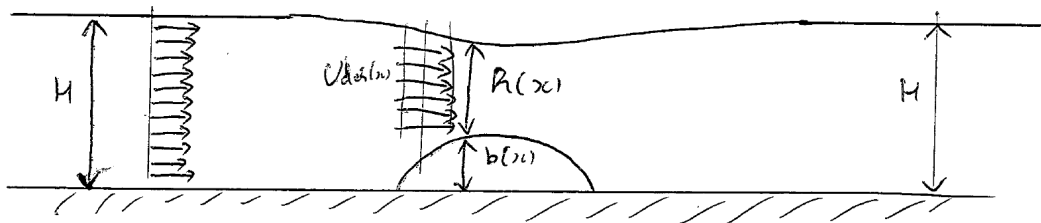


FIGURE 2 – Schéma des notations pour la déformation de la surface libre par un obstacle immergé.

Compte-tenu de la valeur du nombre de Reynolds calculée précédemment, on suppose que l'écoulement est inertiel.

7. Que pouvez-vous déduire de la conservation de la masse ?
8. En considérant la ligne de courant formée par la surface libre dans cet écoulement et en utilisant la relation de la question précédente, montrer que le tirant d'eau  $h(x)$  doit vérifier l'équation suivante :

$$gh + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{W^2 h^2} = g(H - b(x)) + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{W^2 H^2} \quad (1)$$

9. On introduit la fonction  $F(h) = gh + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{W^2 h^2}$ . Faites l'étude de cette fonction. Exprimer puis calculer la valeur numérique de  $h$ , notée  $h_c$ , correspondant à son minimum. Calculer également la valeur de  $F$  en  $h_c$ , notée  $F_c$ . Que vaut le nombre de Froude lorsque  $h = h_c$  ? Que vaut  $Fr$  pour  $h > h_c$  et pour  $h < h_c$  ?

On a tracé  $F(h)$  dans la figure (3) pour la valeur de débit qui nous intéresse ici ( $Q = 20\text{ l s}^{-1}$  ;  $W = 1\text{ m}$ ).

On place maintenant en  $x = 0$  un demi-cylindre de rayon  $R = 4\text{ cm}$ .

10. Quelle est la valeur du tirant d'eau  $h$  au-dessus du centre du demi-cylindre ? En déduire l'allure de la déformation de la surface libre au passage au-dessus de l'obstacle en supposant que  $h$  garde toujours des valeurs supérieures à  $h_c$ .
11. Si on augmente encore le rayon du demi-cylindre, jusqu'à quelle valeur maximale de  $R$ , notée  $R_{max}$  peut-on encore trouver une valeur de  $h$  compatible avec l'équation 1 ?

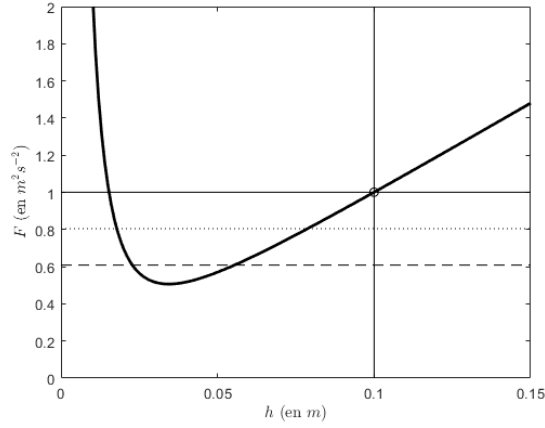


FIGURE 3 – Fonction  $F(h)$  (voir énoncé) tracée pour  $Q = 20 \ell/s$ ,  $W = 1m$ . Les lignes horizontales correspondent aux valeurs du terme droit de l'équation 1 pour  $b = 0$  (ligne continue),  $b = 2 \text{ cm}$  (ligne pointillés) et  $b = 4 \text{ cm}$  (ligne en tirets). La ligne verticale correspond à  $h = 10\text{cm}$ . Les deux lignes continues se croisent au niveau du régime de référence représenté par un cercle.

## 8.2 L'aspirisouffle

(Référence en BD : *Les aventures d'Anselme Lanturlu, l'aspirisouffle*, J-P. Petit.)

<https://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/Francais/aspirisouffle.htm>

On considère deux disques parallèles, de diamètre  $D$ , séparés d'une distance  $d \ll D$  (fig. 4). De l'air, amené par un tube normal aux disques avec une vitesse  $V_c$ , pénètre au centre du disque supérieur par une ouverture de diamètre  $d \ll D$ . Au-delà de la section d'entrée, l'air s'écoule radialement pour déboucher dans l'atmosphère. On néglige les effets visqueux.

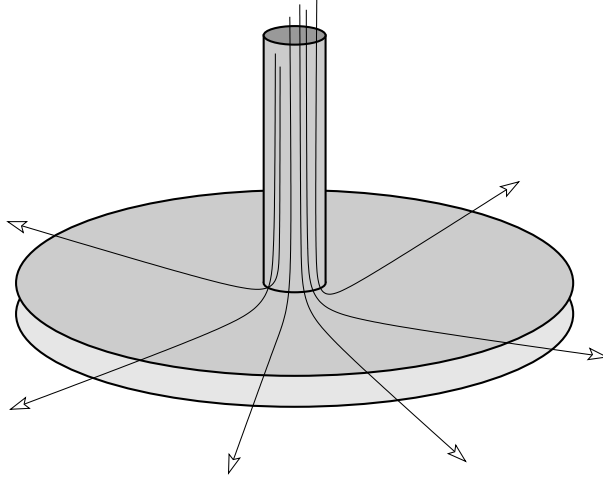


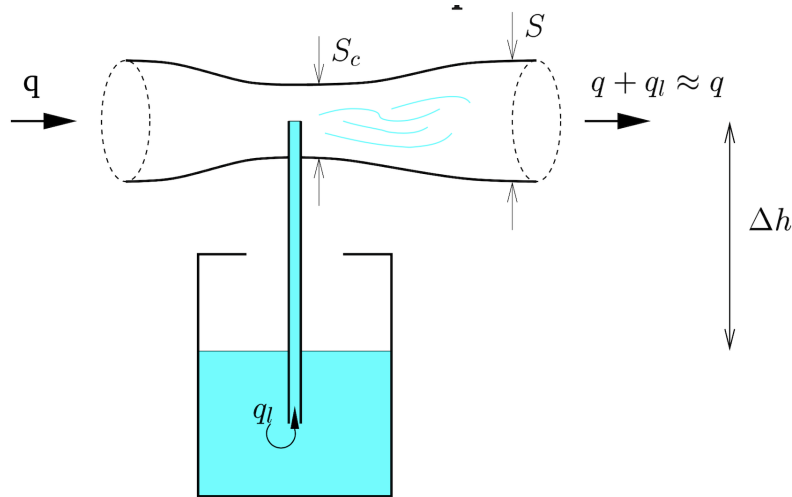
FIGURE 4 – *Ecoulement inter disques.*

On notera  $r$  la distance d'un point à l'axe  $z$  des deux disques. Dans tout le problème, on admet que le module de la vitesse entre les deux disques ne dépend que de  $r$  (sauf dans la zone  $r < d/2$  où les lignes de courant changent de direction). Dans la section de sortie  $r = D/2$ , la pression est égale à la pression atmosphérique  $P_a$ .

1. Calculer la vitesse  $V(r)$  entre les deux disques pour  $d/2 < r < D/2$ . Comparer avec  $V_c$ .
2. Donner la valeur de la pression  $P_c$  dans la conduite en fonction de  $V_c$  et  $P_a$ .
3. Déterminer la loi de pression  $p(r)$  entre les deux disques pour  $d/2 < r < D/2$ . Comparer avec  $P_a$ .

4. Calculer la résultante des forces subies par le disque supérieur de la part des fluides qui l'entourent pour  $d/2 < r < D/2$ . Y a-t'il répulsion ou attraction ?
5. On surestime la pression aux points du disque inférieur  $r < d/2$  en la prenant égale à la pression en 0. Reprendre la question précédente dans le cadre de cette hypothèse.

### 8.3 Le diffuseur de parfum



Le dispositif représenté sur la figure est utilisé pour diffuser du parfum. Un courant d'air, de débit volumique  $q$  constant, circule dans un conduit présentant un rétrécissement. Un tuyau, raccordé au récipient contenant le parfum, est disposé au col. Si le débit d'air est suffisant, le parfum est aspiré dans le tuyau, et circule avec un débit volumique  $q_l$ . On suppose le débit volumique du parfum faible devant celui de l'air, de sorte que le débit volumique en sortie est  $q + q_l \approx q$ .

On note  $\rho_a$  et  $\rho_l$  les masses volumiques de l'air et du liquide,  $S$  et  $S_c$  les sections en entrée et au col, et  $\Delta h$  la hauteur entre la surface du liquide dans le récipient et la sortie du tuyau.

1/ Montrez qu'un débit d'air minimal est nécessaire pour que le parfum soit diffusé. Lorsque le débit d'air est inférieur à cette valeur, donnez la hauteur atteinte dans le tube par le parfum.

2/ Lorsque le débit d'air est supérieur à la valeur critique, calculez le débit volumique de parfum diffusé.

3/ Représentez la fraction volumique de parfum,  $q_l/q$ , en fonction de  $q$ .

(Notez que le même phénomène physique est utilisé dans certains carburateurs de moteurs deux temps, pour aspirer l'essence et la mélanger avec l'air).

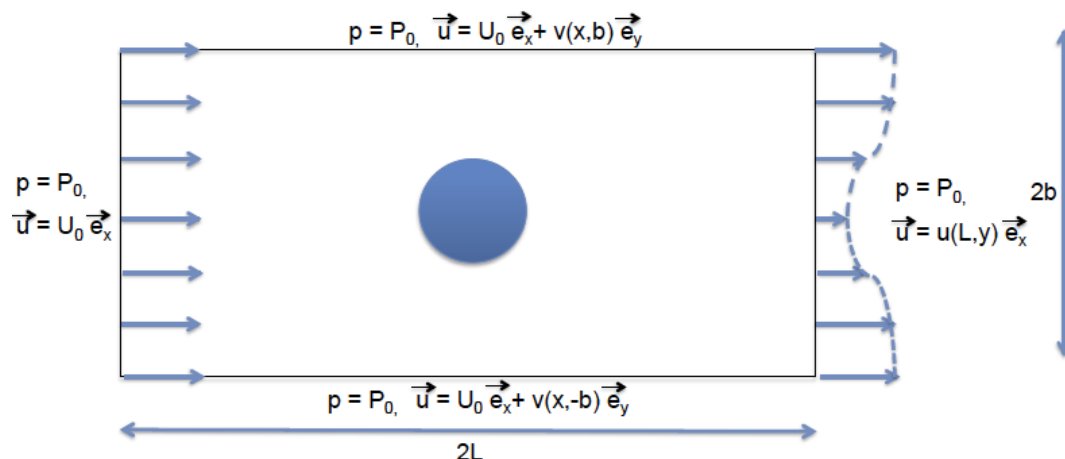
## 9 Écoulements Inertiels II

### 9.0 Traînée exercée sur un cylindre

(Exercice préparatoire ; correction sur le site web du cours)

On étudie l'écoulement autour d'un cylindre fixe de rayon  $a$  et de longueur infinie dans la direction  $z$  (écoulement bidimensionnel dans le plan  $(x, y)$ ). Le fluide est considéré comme un liquide incompressible de masse volumique  $\rho$  constante et de viscosité  $\nu$ . On néglige l'effet de la pesanteur.

Dans le régime inertiel ( $Re \gg 1$ ), l'écoulement est fortement instationnaire et turbulent. Cependant, suffisamment loin du cylindre, on observe que la pression tend vers une constante et que le champ de vitesse tend vers une forme moyenne qui ne dépend pas du temps, et dont la structure est représentée sur la figure ci-dessous. On cherche à estimer la force  $\mathbf{F} = F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y$  exercée par le fluide sur le cylindre à partir de bilans intégraux, à partir de ces profils de vitesse observés loin du cylindre.



On considère pour cela un volume de contrôle correspondant à un domaine parallélépipédique de largeur  $2b$ , longueur  $2L$ , et profondeur  $2H$  (dans la direction  $z$ ). Les champs de vitesse  $\mathbf{u} = u \mathbf{e}_x + v \mathbf{e}_y$  et de pression sur les frontières de ce volume de contrôle sont indiqués sur la figure. La troisième composante de vitesse  $w$  est nulle sur toutes les frontières du domaine. On suppose que les effets visqueux sont négligeables loin du cylindre ( $y$  compris sur les frontières du volume de contrôle).

1. Ecrire un bilan de masse sur le volume de contrôle, et en déduire une relation intégrale reliant  $U_0$ ,  $u(L, y)$ ,  $v(x, -b)$  et  $v(x, b)$ . (ici et dans la question suivante on ne cherchera pas à calculer les intégrales apparaissant dans l'expression).
2. Ecrire un bilan de quantité de mouvement (théorème d'Euler) projeté dans la direction  $x$ , et en déduire une expression de la traînée (composante  $F_x$  de la force exercée) sur le cylindre en fonction du champ de vitesse sur les frontières du domaine.
3. En combinant les équations obtenues aux deux questions précédentes, montrez que la force de traînée peut être estimée par l'équation suivante :  $F_x = 2H\rho \int_{-b}^b u(L, y) (U_0 - u(L, y)) dy$
4. Application. On suppose qu'en sortie le profil de vitesse peut être approximé par la loi suivante :

$$u(L, y) = \begin{cases} U_0 & |y| > a \\ 0.7U_0 & |y| < a \end{cases}$$

En déduire le coefficient de traînée  $C_x = F_x / (2\rho U_0^2 a H)$ .

5. A partir d'un bilan de quantité de mouvement projeté dans la direction  $y$ , donnez une expression de la portance (composante  $F_y$  de la force exercée) en fonction de la vitesse sur les frontières du domaine. A quelle condition cette portance est-elle nulle ? interprétez physiquement.

### 9.1 Déformation d'un écoulement à surface libre (suite de l'exercice 8.1)

#### C. Bilan intégral autour du ressaut hydraulique stationnaire

La valeur  $R_{max}$  correspond donc à une situation où le nombre de Froude prend exactement la valeur 1 au sommet du demi-cylindre. C'est analogue au régime compressible en tuyère lorsqu'on amorce le passage en supersonique en passant par  $M = 1$  au col de la tuyère. Pour des valeurs de rayon du demi-cylindre

supérieures à  $R_{max}$ , l'écoulement bascule de valeurs de  $h$  supérieures à  $h_c$  à des valeurs inférieures, passant ainsi du régime fluvial ( $h > h_c$  et  $Fr < 1$ ) au régime torrentiel ( $h > h_c$  et  $Fr > 1$ ). Ces deux régimes sont analogues aux régimes subsonique ( $M < 1$ ) et supersonique ( $M > 1$ ) en compressible. A l'aval du demi-cylindre, le retour au régime fluvial se fait un moyen d'un choc, qu'on appelle un « ressaut hydraulique », un phénomène fort apprécié des kayakistes et également utilisé pour générer des vagues de surf stationnaires.

On suppose ici qu'un ressaut hydraulique stationnaire s'est formé en aval du demi-cylindre, permettant ce retour au régime fluvial loin de l'obstacle. Dans la figure (5), on a représenté un schéma du ressaut avec plusieurs points identifiés. On note donc  $U_1$  et  $h_1$  la vitesse et le tirant d'eau en régime torrentiel, à gauche, et  $U_2$  et  $h_2$  les mêmes grandeurs à droite, en régime fluvial, après le passage à travers le ressaut.

Au moyen d'un bilan intégral sur le volume de contrôle s'appuyant sur l'eau et compris entre les points (ABCD) du schéma de la figure (5), on va pouvoir déterminer une relation entre  $(U_1, h_1)$  et  $(U_2, h_2)$ . En effet, la présence du ressaut très dissipatif ne permet plus d'appliquer le théorème de Bernoulli entre la partie amont et aval.

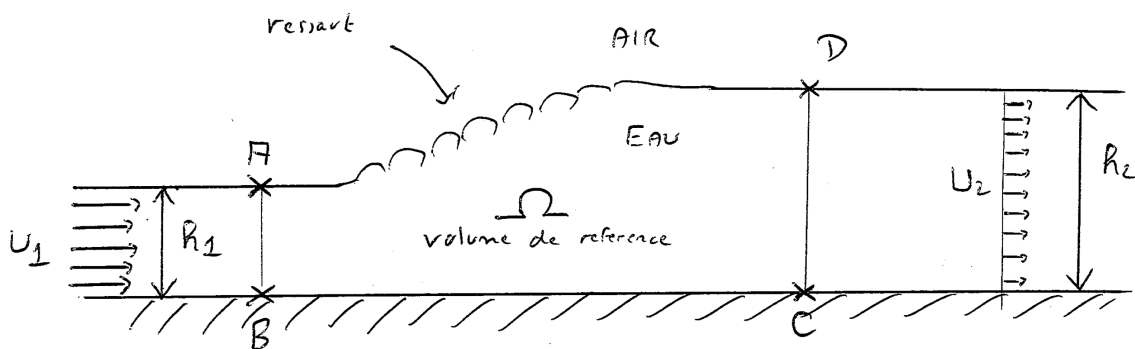


FIGURE 5 – Schéma des notations pour le bilan intégral pour un ressaut hydraulique stationnaire.

12. Au moyen de la courbe tracée dans la figure (3), déterminer graphiquement le tirant d'eau de l'écoulement en régime torrentiel pour un débit de  $Q = 20 \text{ L/s}$ .
13. En faisant l'hypothèse que la vitesse est uniforme et quasi parallèle au fond en amont (selon [AB]) et en aval (selon [CD]), calculer les profils verticaux de pression en [AB] et en [CD]. Que vaut la pression au niveau de la surface libre entre A et D ?
14. Faire le bilan intégral de masse pour trouver une relation de conservation entre  $U_1$ ,  $h_1$ ,  $U_2$  et  $h_2$ . On note toujours  $Q$  le débit volumique.
15. Faire un bilan intégral de quantité de mouvement selon  $x$ , la direction de l'écoulement. En déduire la loi de conservation suivante :

$$0 = h_1 U_1^2 + g \frac{h_1^2}{2} - h_2 U_2^2 - g \frac{h_2^2}{2} \quad (2)$$

16. Montrer que les hauteurs conjuguées  $h_1$  et  $h_2$  doivent satisfaire  $G(h_1) = G(h_2)$  où la fonction  $G(h)$  est donnée par :

$$G(h) = \frac{Q^2}{h} + g \frac{h^2}{2} \quad (3)$$

On a tracé dans la figure (6) la fonction  $G(h)$  pour le débit qui nous intéresse.

17. Par méthode graphique, calculer la valeur du tirant d'eau  $h_2$  après le ressaut, lors du retour au régime fluvial.
18. Calculer la valeur de la fonction  $F$  pour cette valeur de tirant d'eau  $h_2$ , et comparer à la valeur de  $F$  obtenue avec  $H = 0.1 \text{ m}$ . Est-ce normal ?

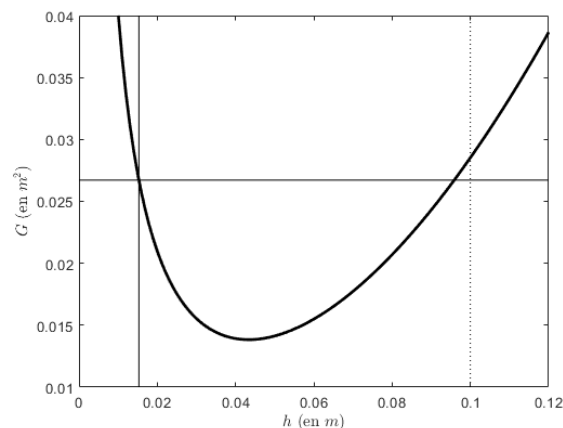


FIGURE 6 – Fonction  $G(h)$  (voir énoncé) tracée pour  $Q = 20 \text{ L/s}$ .

## 9.2 Ventilation d'un tunnel

On considère un tunnel horizontal de section  $S$  uniforme, ventilé par un soufflage d'air frais comme indiqué sur la figure 7. L'air soufflé à la vitesse  $U_s$  dans un conduit de section  $s$  se mélange à l'air du tunnel entre les sections 1 et 2. Dans la partie amont du tunnel (partie gauche), le soufflage peut induire un écoulement vers la droite comme sur la figure, ou vers la gauche. On veut déterminer les conditions réalisant l'un ou l'autre écoulement. Dans tout le problème, on négligera les effets visqueux, et on considèrera l'écoulement isovolume, stationnaire, et uniforme dans toute section du tunnel, sauf entre les sections 1 et 2.

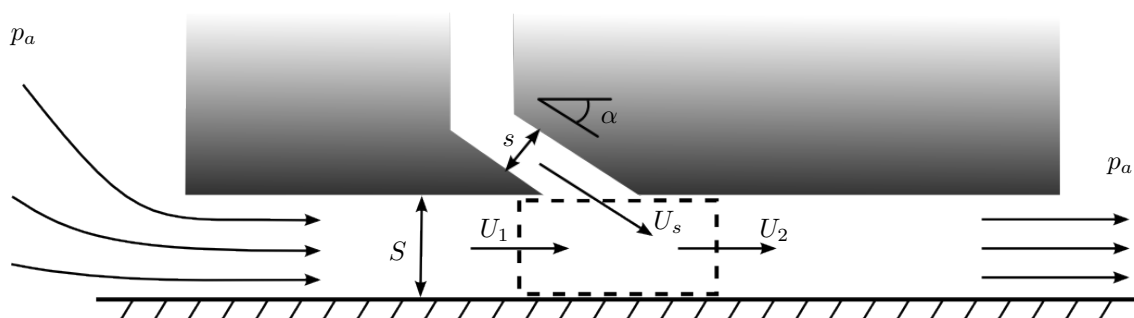
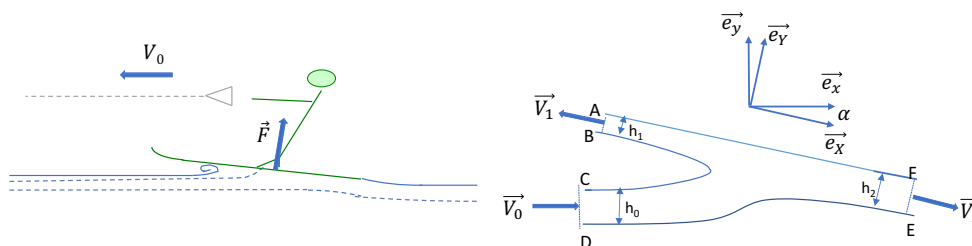


FIGURE 7 – Schéma du tunnel ventilé.

1. On considère que l'écoulement correspond à la figure : au voisinage de l'entrée du tunnel, l'air atmosphérique est accéléré progressivement, alors qu'il sort du tunnel sous la forme d'un jet.
  - (a) Ecrire la relation de Bernoulli pour une ligne de courant entre l'extérieur du tunnel (infini amont) et la section 1.
  - (b) Quelle est la pression de l'air à la sortie du tunnel ? En déduire, en utilisant la relation de Bernoulli, la pression dans la section 2.
  - (c) Appliquer le bilan intégral de quantité de mouvement pour le volume de contrôle limité par les parois du tunnel, les sections 1 et 2 et la section de soufflage, d'aire  $s/\sin \alpha$  où  $\alpha$  est l'angle du conduit de soufflage avec l'axe du tunnel. On considèrera l'angle  $\alpha$  petit, soit  $\cos \alpha \approx 1$ .
  - (d) Ecrire la relation liant  $U_s$ ,  $U_1$  et  $U_2$ , issue de la conservation de la masse.
  - (e) Déduire des équations établies ci-dessus la relation quadratique donnant la vitesse normalisée  $u = U_1/U_s$  en fonction du rapport des sections  $r = s/S$ .
  - (f) Montrer qu'il n'existe de solution correspondant à la figure que si le rapport des sections  $r$  est inférieur à une valeur critique que l'on précisera.

- (g) Tracer l'évolution de  $u$  en fonction de  $r$ , en précisant les points remarquables de la courbe. On donnera en particulier la valeur de  $r$  qui maximise l'entraînement d'air, et la valeur de ce maximum de  $u$ .
2. Lorsque le rapport des sections excède la valeur critique déterminée ci-dessus, l'écoulement dans la partie amont du tunnel s'inverse. Aux deux extrémités du tunnel, l'air sort sous la forme d'un jet.
- (a) En procédant de façon similaire à la question précédente, déterminer la vitesse normalisée  $u$  en fonction du rapport des sections  $r$ .
- (b) Vérifier que la vitesse  $u$ , en tant que fonction de  $r$ , ne subit pas de discontinuité entre les deux régimes d'écoulement.
- (c) Pour un tunnel de 6 mètres de diamètre et des vitesses d'écoulement de l'ordre du mètre par seconde, le fait de négliger les effets visqueux vous paraît-il justifié ?

### 9.3 Ski nautique



Un skieur nautique se déplace à une vitesse  $V_0$  (en module) sur une étendue d'eau (fluide de propriétés  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  et  $\nu = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  supposées uniformes) dans l'environnement terrestre au niveau de la mer ( $P_{atm} = 10^5 \text{ Pa}$ ;  $g = 10 \text{ m}^2/\text{s}$ ).

Il utilise un monoski, supposé rectangulaire, de longueur  $L = 1.5 \text{ m}$  et largeur  $\ell = 20 \text{ cm}$ .

On cherche à estimer la force  $\vec{F}$  exercée sur le ski.

Dans les applications numériques on prendra une valeur de la vitesse  $V_0 = 25 \text{ km/h}$ .

#### A. Analyse du problème

1. A quel régime d'écoulement a-t-on affaire dans ce problème ? (justifiez en terme de nombres adimensionnels et/ou d'hypothèses physiques).
2. On étudie le problème dans le référentiel du skieur, ce qui a l'avantage de pouvoir supposer que l'écoulement d'eau est *stationnaire*. On observe que sous le ski une partie de l'écoulement d'eau est réorienté sous la forme d'un jet d'eau vers l'avant, qui déferle ensuite (voir figure). Justifiez l'existence d'un point d'arrêt  $S$  situé sous le ski. Tracez la forme de la ligne de courant passant par  $S$ , ainsi que quelques lignes de courant voisines de celles-ci.
3. On note  $[z]$  l'ordre de grandeur des variations d'altitude dans l'écoulement, et on définit le nombre de Froude par  $Fr = \frac{V_0^2}{g[z]}$ . Vérifiez que ce nombre est sans dimensions. Quelle est son interprétation physique ?
4. En comparant l'ordre de grandeur des différents termes dans l'équation de Bernoulli, montrez que si  $Fr \gg 1$  celle-ci se simplifie et conduit à  $p + \rho|\vec{u}|^2/2 = \text{cte}$ .
5. Justifiez qu'il est raisonnable de supposer  $[z] \approx \ell$ . En tirer les conclusions.

#### B. Estimation de la force par un bilan de quantité de mouvement

On souhaite maintenant calculer la force à l'aide d'un bilan de quantité de mouvement. On note  $\alpha$  l'angle d'incidence du ski et on introduit deux repères  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$  et  $(\vec{e}_X, \vec{e}_Y)$  comme définis sur la figure.

On considère un volume de contrôle  $\Omega$  comme représenté sur la figure, délimité par un contour  $\partial\Omega = (ABCDEF A)$  comme représenté sur la figure, d'épaisseur  $\ell$  (dans la direction perpendiculaire  $z$ ).

- les portions (BC) et (DE) sont des *lignes de courant*,
  - la portion (FA) est la surface du ski sur laquelle on souhaite calculer la force exercée. On suppose ici que la longueur (FA) vaut  $L$ .
  - la portion (AB) est une "section d'entrée" de dimension  $S_0 = \ell h_0$  à travers laquelle la vitesse est supposée uniforme et de valeur  $\vec{V}_0 = V_0 \vec{e}_x$ .
  - la portion (CD) est la section  $S_1 = \ell h_1$  à travers laquelle s'effectue le "jet déferlant". On suppose également la vitesse uniforme dans cette section est donnée par  $\vec{V}_1 = -V_1 \vec{e}_X$ .
  - la portion (EF) est la section "de sortie"  $S_2 = \ell h_2$  de l'écoulement. Dans cette section on suppose la vitesse uniforme et donnée par  $\vec{V}_2 = +V_2 \vec{e}_X$ .
6. Justifiez que la pression sur les portions (AB), (BC), (CD), (DE), (EF) il est justifié de considérer que la pression est uniforme et égale à la pression atmosphérique  $P_{atm}$  (on pourra admettre ce résultat en ce qui concerne la portion (DE) ).
  7. Montrez que  $V_1 = V_0$  et  $V_2 = V_0$ .
  8. A l'aide d'un bilan de masse sur le volume de contrôle, donnez une relation entre  $h_0, h_1$  et  $h_2$ .
  9. A l'aide du bilan de quantité de mouvement sur le volume de contrôle (théorème d'Euler), donnez une expression de la force  $\vec{F}$  sous forme d'une intégrale sur le contour (ouvert)  $(ABCDEF)$ .
  10. En projetant cette expression sous la forme  $\vec{F} = F_X \vec{e}_X + F_Y \vec{e}_Y$ , et en simplifiant les intégrales compte tenu des hypothèses formulées, montrez que :

$$F_X = \rho \ell V_0 (h_0 \cos \alpha + h_1 - h_2)$$

et donnez une expression similaire pour la composante  $F_Y$  .

11. Justifiez pourquoi la composante  $F_X$  est nulle. En déduire que  $h_1 = h_0(1 - \cos \alpha)/2$  et donnez une expression similaire pour  $h_2$ .
12. Montrez que la composante selon  $Y$  des forces exercées sur le ski par les fluides (eau+air) est :

$$F_{Y,(eau+air)} = \rho \ell h_0 V_0 \sin \alpha$$

13. On écrit maintenant la force sous la forme  $\vec{F} = F_y \vec{e}_y + F_x \vec{e}_x$ . Exprimez la traînée  $F_x$  et la portance  $F_y$  en fonction des paramètres du problème.
14. Applications numériques : En supposant que  $h_0 \approx \ell$  et  $V_0 = 25 \text{ km/h}$ , donnez l'angle  $\alpha$  générant une portance équilibrant le poids d'un skieur d'une masse de  $80 \text{ kg}$ . Que vaut alors la traînée  $F_x$  .

## 10 Ecoulements potentiels

### 10.0 Ecoulement potentiel stationnaire autour d'une sphère

(Exercice préparatoire ; correction sur le site web du cours)

Correction détaillée sur moodle.

Le but de cet exercice est de calculer l'écoulement autour d'une sphère de rayon  $a$  se déplaçant à la vitesse  $U$ , sous l'hypothèse de l'écoulement potentiel.

#### A. Questions préliminaires

1. Justifiez dans quelle mesure, l'écoulement autour de la sphère peut être considéré comme irrotationnel. Cette approximation est-elle uniformément valable ?
2. Sous cette hypothèse, justifiez que l'écoulement peut être déduit d'un potentiel  $\Phi$ . Rappelez la relation reliant  $\vec{u}$  et  $\Phi$  ainsi que la relation vérifiée par  $\Phi$  si l'écoulement est incompressible.
3. Rappelez l'expression du potentiel des vitesses associé à un champ de vitesse uniforme de la forme  $\vec{u} = U_0 \vec{e}_x$ , et montrez qu'en coordonnées sphériques celui-ci s'écrit  $\Phi = U_0 r \cos \theta$ .

#### B. Etude de la solution potentielle

4. Justifiez qu'il est pertinent de rechercher une solution à variable séparée sous la forme suivante :

$$\Phi(r, \theta) = f(r) \cos \theta$$

5. Donnez l'équation différentielle vérifiée par  $f(r)$ , puis les conditions limites vérifiées par le champ de vitesse sur la surface de la sphère ( $r = a$ ) ainsi que la condition loin de la sphère ( $r \rightarrow \infty$ ) en supposant qu'on tend vers un écoulement uniforme.
6. Résoudre l'équation différentielle précédente et donner  $f(r)$ . En déduire que le champ de vitesse est donné par :

$$u_r(r, \theta) = U_0 \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta$$

$$u_\theta(r, \theta) = -U_0 \left( 1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \sin \theta$$

7. Représentez schématiquement la structure de l'écoulement. Quelle est la valeur maximale de la vitesse et à quelle position cette valeur est-elle atteinte ?
8. Donnez l'expression du champ de pression pariétale  $p(r = a, \theta)$  à la surface de la sphère. Tracez cette expression en fonction de  $\theta$ . A quelles positions la pression atteint-elle les valeurs minimale et maximale ?
9. Exprimez sous forme d'une intégrale la force exercée sur la sphère correspondant à cette solution potentielle.
10. Donnez la valeur de cette intégrale. Que constate-t-on ?

### 10.1 Ecoulement autour d'un cylindre : effet Magnus

On étudie l'écoulement bidimensionnel d'un fluide incompressible de masse volumique uniforme  $\rho$ , autour d'un cylindre de rayon  $a$ . Loin du cylindre la vitesse est uniforme et vaut  $\vec{u} = U \vec{e}_x$ .

Dans cet exercice on néglige la gravité.

On utilisera des coordonnées polaires  $(r, \theta)$  dans un repère centré sur  $O$  le centre du cylindre.

#### A. Ecoulement symétrique : paradoxe de d'Alembert

1. Rappelez la définition et les conditions d'existence d'un écoulement potentiel. Quelle est l'équation classique vérifiée par ce dernier ?
2. Justifiez que le potentiel associé à un écoulement uniforme vaut  $\phi_U = U_0 x = U_0 r \cos \theta$ .

3. On recherche la solution du problème de l'écoulement autour du cylindre sous une forme à variable séparée, de la forme  $\Phi(r, \theta) = g(r) \cos \theta$ . Donnez l'équation différentielle vérifiée par  $g(r)$ .
4. Donnez les conditions limites en  $r = a$  et en  $r \rightarrow \infty$  vérifiée par la fonction  $g$ .
5. En déduire la solution  $\Phi(r, \theta)$ .
6. Exprimez les composantes  $u_r, u_\theta$  du champ de vitesse.
7. Donnez l'expression de la pression  $p(r, \theta)$ . Tracez la pression pariétale  $p(a, \theta)$  pour  $\theta = [-\pi, \pi]$ .
8. En déduire la force totale exercée sur le cylindre. Que constate-t-on ? A quel paradoxe célèbre a-t-on affaire ?

## B. Ecoulement purement azimutal

On considère maintenant un écoulement purement azimutal, défini par  $\vec{u} = u_\theta(r) \vec{e}_\theta$ .

9. Montrez qu'un écoulement potentiel de ce type est forcément de la forme  $u_\theta(r) = \Gamma/(2\pi r)$  où  $\Gamma$  est un paramètre appelé *circulation*.
10. Représentez la structure du champ de vitesse (on se concentrera sur des valeurs de  $\Gamma$  négatives correspondant à une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre).
11. Donnez l'expression du potentiel  $\Phi(r, \theta)$  puis de la pression  $p(r, \theta)$  correspondants.
12. Que vaut dans ce cas la force totale exercée sur le cylindre ?

## C. Ecoulement composite

*Il est fortement conseillé de traiter cet exercice en utilisant en parallèle le programme `Ecoulement_Potentiel_Cylindre.py` disponible sur le site web du cours.*

On considère maintenant un écoulement composite de la forme suivante :

$$\Phi(r, \theta) = U_0 \cos \theta \left( r + \frac{a^2}{r} \right) + \frac{\Gamma \theta}{2\pi} \quad (4)$$

13. \* Montrez que cet écoulement admet également une fonction de courant définie par

$$\psi(r, \theta) = U_0 \sin \theta \left( r - \frac{a^2}{r} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r/a).$$

Justifiez que les lignes de courant et les lignes isopotentielles forment des réseaux de courbes orthogonales.

14. Donnez l'expression de la vitesse à la paroi, c.a.d.  $u_r(r = a, \theta)$  et  $u_\theta(r = a, \theta)$ , puis discutez, suivant la valeur de  $\Gamma$ , le nombre et la position des points d'arrêt sur la surface du cylindre (on suppose  $\Gamma \leq 0$ ).  
Représentez schématiquement la forme des lignes de courant pour différentes valeurs de  $\Gamma$  (on se concentrera sur des valeurs de  $\Gamma$  négatives).
15. Exprimez le champ de pression  $p(r, \theta)$  correspondant à cet écoulement.  
Représentez graphiquement la loi de pression pariétale  $p(r = a, \theta)$  en fonction de  $\theta$ , pour plusieurs valeurs de  $\Gamma$ .
16. Calculez la force  $\vec{F}$  (par unité de longueur dans la direction transverse) exercée par le fluide sur le cylindre. Montrez que les composantes  $F_x$  et  $F_y$  de cette force vérifient  $F_x = 0$  et  $F_y = -\rho \Gamma U_0$ .
17. \* Retrouvez ce résultat à partir du théorème d'Euler sur un volume de contrôle judicieusement choisi.
18. On suppose que le cylindre tourne selon son axe, à la vitesse angulaire  $\Omega$  (c'est à dire que son vecteur rotation est  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ ). Donnez, en coordonnées axisymétriques, la vitesse d'un point situé sur la paroi du cylindre. Expliquez pourquoi l'approximation de fluide parfait ne permet pas de calculer  $\Gamma$  en fonction de  $\Omega$ .
19. L'étude des effets visqueux à l'intérieur de la couche limite (*Moore, 1953, Journal of Fluid Mechanics*) permet de montrer que si le cylindre tourne très vite ( $\Omega \gg U_0/a$ ), la circulation est reliée au taux de rotation par  $\Gamma = 2\pi a^2 \Omega$ . Donnez une interprétation physique de cette condition.
20. Montrer que dans ce cas  $\vec{F} = 2\pi \rho a^2 \vec{U}_0 \wedge \vec{\Omega}$  (formule de Magnus).

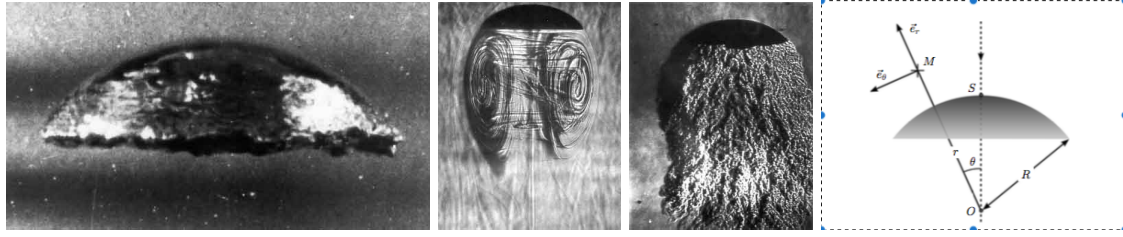


FIGURE 8 – (a) Photographie d'une bulle parachute en ascension (Davenport *et al.*, 1967). Bulle avec sillage laminaire à  $Re = 180$  (b) et turbulent à  $Re = 17000$  (c). D'après Wegener & Parlange (1973). (d) : Paramètres géométriques de l'écoulement autour d'une bulle.

## 10.2 Ascension d'une bulle parachute (d'après Davies & Taylor, 1950) \*

L'expérience montre que les bulles de gaz de quelques centimètres de diamètre qui remontent dans un liquide ont une forme de parachute (fig. 8) : la partie avant de la bulle est sphérique et sa partie arrière est à peu près plate (calotte sphérique). G. I. Taylor a étudié expérimentalement la relation entre la vitesse d'ascension des bulles et le rayon de courbure de la partie avant. Dans ses expériences, des bulles d'air s'élèvent dans du nitrobenzène (de viscosité cinématique  $\nu = 0.015 \text{ cm}^2/\text{s}$  et de masse volumique  $\rho = 1.2 \text{ g/cm}^3$ ). Les rayons de courbures observés sont compris entre 2.4 et 4.8 cm, les vitesses d'ascension correspondantes entre 29 et 48 cm/s et les dimensions transverses  $2R \sin \theta_m$  entre 2.8 et 6.2 cm.

1. Dans les expériences décrites ci-dessus, quel est l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds pour l'écoulement de liquide ? Conclusions.
2. Évaluez le nombre de Bond. En déduire que la pression le long de la surface de la bulle peut être considérée comme constante.
3. A partir du théorème de Bernoulli, donner une relation entre l'altitude  $z = R \cos \theta$  et la vitesse  $|\vec{u}(R, \theta)|$  sur la surface de la bulle.
4. Taylor fait la remarque que l'écoulement du liquide autour du sommet de la calotte sphérique est peu différent de l'écoulement potentiel autour d'une sphère donné par

$$u_r(r, \theta) = -U \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta \quad \text{et} \quad u_\theta(r, \theta) = U \left( 1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \sin \theta$$

dans le référentiel où la bulle est immobile et où le liquide se déplace à la vitesse  $U$  loin de la bulle.

En déduire que la vitesse de la bulle est donnée par :

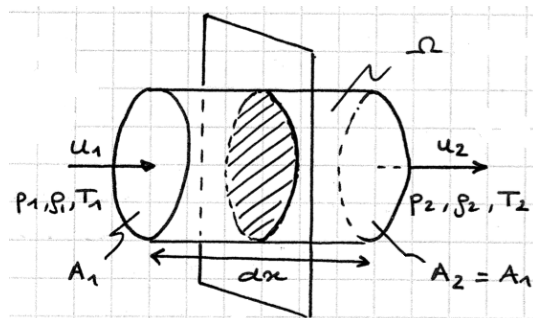
$$U = \frac{2}{3} \sqrt{gR}$$

5. Confronter cette prédiction théorique aux valeurs obtenues expérimentalement.

## 11 Acoustique et ondes de choc

### 11.0 Etablissement des relations de saut pour un choc droit

(Exercice préparatoire ; correction sur le site web du cours)



On considère un choc droit, stationnaire, comme représenté sur la figure.

Le but de cet exercice est d'établir les relations de saut permettant de calculer les variations de pression, masse volumique, température, et vitesse (c.a.d.  $p_2/p_1$ ,  $\rho_2/\rho_1$ ,  $T_2/T_1$ ,  $u_2/u_1$ ) en fonction du nombre de mach amont  $M_1 = u_1/c_1$ .

1. A partir de bilans intégraux dans un volume de contrôle  $\Omega$  entourant le choc, comme représenté sur la figure, et de l'équation d'état, écrire 4 relations reliant les grandeurs aval aux grandeurs amont.
2. A partir du bilan d'énergie, exprimer  $T_2/T_1$  en fonction de  $M_1$  et  $M_2 = u_2/c_2$ .
3. A partir du bilan de quantité de mouvement, exprimer  $p_2/p_1$  en fonction de  $M_1$  et  $M_2$ .
4. A partir du bilan de masse, exprimer  $\rho_2/\rho_1$  en fonction de  $M_1$  et  $M_2$ .
5. A partir de l'équation d'état, établir une relation reliant  $M_2$  et  $M_1$ .
6. Résoudre cette relation, et en déduire  $M_2$  en fonction de  $M_1$ .

On pourra mettre la relation sous la forme d'un polynôme de degré 2 pour la variable  $X = M_2^2$ , et remarquer que ce polynôme admet une racine évidente  $X = M_1^2$ .

7. En reprenant les résultats des questions 2 à 4, donnez l'expression finale de  $p_2/p_1$ ,  $\rho_2/\rho_1$ ,  $T_2/T_1$ , et  $u_2/u_1$  en fonction du nombre de mach amont  $M_1 = u_1/c_1$ .
8. Ecrire un programme permettant de tracer  $p_2/p_1$ ,  $\rho_2/\rho_1$ ,  $T_2/T_1$ ,  $M_2$ , ainsi que  $s_2 - s_1$  en fonction de  $M_1$ .

### 11.1 Acoustique des instruments à vent

Les instruments à vent employés dans l'orchestre sont classiquement regroupés en famille des bois et cuivre selon le mode l'excitation du tuyau par le souffle du musicien (embouchure pour les cuivres, anches ou biseau pour les vents). Cette classification "historique" n'est pas très pertinente du point de vue de l'acoustique musicale. De ce point de vue, les propriétés essentielles sont :

- La forme du résonateur. De ce point de vue on distingue les instruments cylindriques (flûte, clarinette...), les instruments coniques (hautbois, saxophone, ...), et les instruments combinant une section cylindrique et une section conique (trompette, cor, trombone...).<sup>1</sup>
- Le fait que le tuyau soit ouvert ou fermé en entrée et en sortie. On distingue les instruments ouverts-ouverts (flûte traversière, flûte à bec, tuyaux d'orgue), les instruments ouverts-fermés (flûtes de pan) et les instruments fermés-ouverts (tous les instruments à anche ou à embouchure pour lesquels le bec se comporte comme une extrémité fermée).

#### A. La Flûte

On modélise une flûte traversière par un cylindre de longueur  $L$  et de rayon  $a$ , supposé ouvert à ses deux extrémités.

1. Ajoutons que la présence d'un pavillon n'est pas essentielle à la modélisation acoustique, et qu'il existe aussi des instruments à résonateur globulaire (ocarina) fonctionnant selon le principe du résonateur de Helmholtz

1. Rappelez l'équation de Helmholtz gouvernant la pression acoustique  $p'(x, t)$ , et la relation entre la pression acoustique et le débit massique  $q(x, t)$ .
2. Donnez les conditions limites est vérifiées par  $p'$  et  $q$  en  $x = 0$  et  $x = L$ , en supposant qu'aux deux extrémités la pression est égale à la pression atmosphérique (hypothèse d'extrémité *idéalement ouverte*).
3. On cherche la solution sous la forme de mode propre (ou onde stationnaire) de la forme  $p'(x, t) = P(x) \cos(\omega t + \phi)$ . A partir de l'équation de Helmholtz, donnez les valeurs des fréquences et tracez la forme des trois premiers modes propres. A quelles positions sont les noeuds de pression et de débit associés à ces modes ?
4. On considère le mode fondamental (de fréquence la plus basse). Montrez que la structure du mode peut s'écrire sous la forme de deux ondes progressives se propageant en direction opposées. Par un raisonnement simple retrouvez la valeur de la fréquence fondamentale.
5. Application : calculez la fréquence fondamentale (théorique) d'une flûte traversière de longueur  $66\text{cm}$  et d'une clarinette de même longueur.
6. Une modélisation plus poussée de l'écoulement au voisinage des extrémités montre que les noeuds de pression sont en réalité situés à une distance  $\Delta = 0.85a$  de chacune des extrémités. Calculez, en pourcentage (puis en demi-tons) la modification de fréquence due à cette correction.

## B. La clarinette

On modélise une clarinette par un cylindre de longueur  $L$  et de rayon  $a$ , supposé ouvert à la sortie mais fermé à l'entrée.

1. Donnez, dans ce cas, les conditions limites est vérifiées par  $p'$  et  $q$  en  $x = 0$  et  $x = L$ .
2. En cherchant de nouveau la solution sous la forme de mode propre, donnez les valeurs des fréquences et tracez la forme des trois premiers modes propres. A quelles positions sont les noeuds de pression et de débit associés à ces modes ?
3. Comparez la fréquence fondamentale d'une clarinette à celle d'une flûte. Que constate-t-on ?

## C. Le hautbois

Un hautbois peut être modélisé par un tuyau conique de longueur  $L$ , rayon en sortie  $a$  (ce qui correspond à un angle d'ouverture  $\alpha = \tan^{-1}(a/L)$ ), supposé ouvert en sortie et (forcément) fermé en entrée (car terminé par une pointe d'épaisseur nulle...)

1. Justifiez que la pression doit être cherchée sous la forme  $p'(r, t)$  où  $r$  est le rayon en coordonnée sphérique.
2. Donnez l'expression de l'équation de Helmholtz en coordonnées sphériques.
3. On cherche de nouveau la solution sous la forme de modes propres. Montrez que ceux-ci sont de la forme  $p'(r, t) = A \sin(\omega r/c)/r \cos(\omega t)$ . Quelles sont les fréquences des modes propres ?
4. Tracez, pour les 3 premiers modes, la forme de la pression  $p'(x, t)$  et du débit acoustique  $q(r, t)$  correspondant.
5. Comparez la fréquence fondamentale d'un hautbois de longueur  $L$  à celles d'une flûte et d'une clarinette de même longueur. Que constate-t-on ?

## D. Le trombone\*

Un trombone peut être modélisé comme un cylindre de longueur  $L_2$  et de rayon  $a$ , fermé en entrée, raccordé à un cône de même longueur  $L_1$  et de rayon final  $R = 5a$ , ouvert en sortie (on ne tient pas compte du pavillon).

1. Donnez l'angle  $\alpha$  du cône et la position théorique de la pointe de celui-ci. (on note  $x_1$  la distance entre la pointe et le raccord entre les deux parties du tuyau).
2. On suppose que dans la section cylindrique la solution prend la forme d'une onde plane ( $p' = P(x) \cos \omega t$ ) et que dans la section conique elle prend la forme d'une onde sphérique ( $p' = F(r)/r \cos \omega t$ ). En supposant que la pression et le débit acoustique sont continus au raccord entre les deux sections du tuyau, montrez que les fréquences des modes propres sont solutions de l'équation suivante :

$$\tan(kL_2) - \cot(kL_1) - \frac{1}{kx_1} = 0.$$

## E. Discussion

1. Comparez la fréquence fondamentale d'un hautbois de longueur  $L$  à celles d'une flûte et d'une clarinette de même longueur. Que constate-t-on ?
2. Pour des raisons musicales, un instrument de musique a un son harmonieux si les fréquences des modes supérieurs (les partiels) sont multiples de la fréquence du mode fondamental. Cette relation est-elle vérifiée par les instruments considérés dans cet exercice ?

Pour en savoir plus : *Acoustics of musical instruments*, N. H. Fletcher & T. D. Rossing.

## 11.2 Tube de Pitot en écoulement supersonique

On considère un écoulement supersonique uniforme dont on cherche à mesurer les caractéristiques (vitesse  $u_1$ , nombre de Mach  $M_1$ , pression  $p_1$ , pression génératrice  $p_{i1}$ ) à l'aide d'un tube de Pitot double.

1. Décrire qualitativement l'écoulement dans le voisinage du tube de Pitot.
2. Déterminer l'expression du nombre de Mach  $M_2$  au niveau du tube de Pitot en fonction des pressions  $p_2$  et  $p_{i2}$  mesurées par le tube de Pitot.
3. En déduire  $M_1$ .
4. Déterminer  $p_1$  et  $p_{i1}$ .
5. Expliquer comment il serait possible de prédire la vitesse  $u_1$  de l'écoulement incident.

## 12 Ecoulements compressibles

### 12.0 Régimes d'écoulement dans une tuyère

(Exercice préparatoire ; correction sur le site web du cours)

On considère dans ce problème l'écoulement isentropique d'un gaz parfait dans une tuyère intercalée entre un réservoir à air comprimé et l'atmosphère à pression  $P_a = 1$  atm. On assimilera le gaz à de l'air pur ( $\gamma = 1.405$ ,  $r = 287$  J/kg/K). La section de sortie a un diamètre  $D_s = 5$  cm.

#### Régime 1 :

Dans ce régime, la vitesse du gaz au niveau du col de la tuyère est  $u_c = 250$  m/s. La température dans le réservoir est  $T_i = 300$  K.

1. Calculer la température au col  $T_c$  puis le nombre de Mach au col  $M_c$ .
2. En déduire la nature (subsonique, supersonique ou sonique) de l'écoulement dans le convergent, au col et dans le divergent.
3. On mesure en sortie de la tuyère une température égale à la température extérieure ambiante  $T_s = T_a = 296$  K. Calculer le nombre de Mach  $M_s$  dans la section de sortie.
4. De la même façon, la pression en sortie de tuyère  $P_s$  correspond à la pression atmosphérique  $P_a$ . En déduire la pression génératrice  $P_i$  dans le réservoir puis la masse volumique génératrice  $\rho_i$ .
5. Donnez la température en sortie de la tuyère  $T_s$ , puis le nombre de Mach  $M_s$  dans la section de sortie.
6. Calculer la vitesse en sortie  $u_s$  et la masse volumique en sortie  $\rho_s$  puis en déduire le débit massique  $\dot{m}$  de la tuyère.

#### Régime 2 :

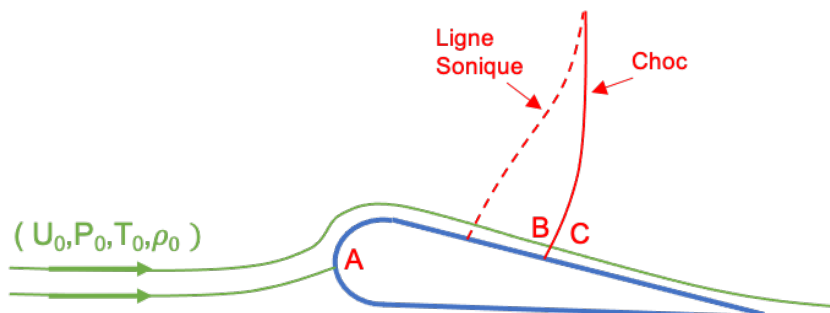
Dans cette partie, la pression  $P_i$  dans le réservoir est augmentée jusqu'à ce que le nombre de Mach en sortie atteigne  $M_s = 1.5$ . Pour ce régime, on observe ni onde de choc ni onde de détente : la tuyère est dite *adaptée*, c'est-à-dire que la pression en sortie de tuyère  $P_s$  est égale à la pression ambiante  $P_a$ .

7. Déterminer la nature (subsonique, supersonique ou sonique) de l'écoulement dans le convergent, au col et dans le divergent.
8. Les conditions thermodynamiques en sortie de tuyère sont les mêmes que dans les questions ?? et 4. En déduire la pression génératrice  $P_i$  et la température génératrice  $T_i$  régnant dans le réservoir à air comprimé.
9. Calculer la température au col  $T_c$ .
10. Calculer le diamètre de la section au col  $D_c$ .
11. Calculer le débit massique  $\dot{m}$  pour ce régime de fonctionnement de la tuyère.

#### Régime 3 :

12. Avec les données pour  $P_i, T_i$  de la partie précédente, on observe maintenant un choc droit, stationnaire, à la position du plan de sortie. Donnez les conditions  $P_2, T_2, u_2, M_2$  immédiatement à l'aval du choc.

### 12.1 Ecoulement transsonique autour d'une aile d'avion



Un avion vole à un nombre de Mach de 0.95 à une altitude où la pression atmosphérique  $P_0$  est égale à 0.223 bar et où la masse volumique de l'air est  $\rho_0 = 0.349$  kg.m<sup>-3</sup>.

La figure représente l'écoulement dans le repère de l'aile ; dans celui-ci l'écoulement incident a une vitesse de  $U_0$  égale (en norme) à la vitesse de l'avion. Sur l'extrados du profil, l'accélération de l'écoulement conduit à l'apparition d'une poche dans laquelle l'écoulement est localement supersonique ; à la sortie de cette poche l'écoulement redevient brutalement subsonique au travers d'un choc.

On suppose que l'air se comporte comme un fluide parfait (de propriétés thermodynamiques  $r = 287 \text{ J/K/kg}$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $c_p = \gamma r / (\gamma - 1) = 1000 \text{ J/K/kg}$ ) et pour les trois premières questions que l'écoulement est isentropique.

On admettra que la propriété de conservation de l'enthalpie totale  $H = c_p T + U^2/2$ , démontrée en cours pour des écoulements monodimensionnels, reste valable *le long de chaque ligne de courant*.

1. Calculer la vitesse de l'avion ; en  $m/s$  puis en  $km/h$  et en noeuds ( $kts$ ).
2. Calculer la pression et la température au point d'arrêt sur le bord d'attaque de l'aile (point A sur la figure).
3. Au point B situé immédiatement avant le choc (mais à l'extérieur de la couche limite), on mesure une température de  $T_B = 202 \text{ K}$ . Donnez la valeur de la vitesse  $U_B$ , du nombre de Mach  $M_B$  et de la pression  $P_B$  en ce point.
4. Donnez la valeur du nombre de Mach au point C situé immédiatement après le choc, puis la pression  $P_C$  et la vitesse  $U_C$ .

## 12.2 Ecoulement isentropique (CC3 2025)

Dans un turbo-réacteur, les gaz entrent dans la tuyère à la vitesse  $U_1 = 275 \text{ m.s}^{-1}$  et à une température de  $T_1 = 741^\circ \text{C}$ . Leur vitesse de sortie est de  $U_2 = 564 \text{ m.s}^{-1}$ .

Le gaz est considéré assimilé à de l'air pur (considéra comme un gaz parfait de propriétés thermodynamiques  $r = 287 \text{ J/K/kg}$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $c_p = \gamma r / (\gamma - 1) = 1000 \text{ J/K/kg}$ ), l'écoulement est supposé isentropique et on néglige tout effet visqueux.

1. (Question de cours) A partir d'un bilan d'énergie sur un volume de contrôle  $\Omega$  correspondant à la tuyère, montrez que la quantité  $c_p T + \frac{U^2}{2}$  est conservée au cours de l'écoulement. Quelle est l'interprétation de cette quantité ?
2. En déduire (application numérique) la température  $T_2$  du gaz en sortie de la tuyère.
3. Donnez la valeur (application numérique) du nombre de Mach en entrée et en sortie (notés respectivement  $M_1$  et  $M_2$ ) . Que peut-on en déduire sur les propriétés de l'écoulement dans la tuyère ?
4. La pression en sortie étant  $P_2 = 0.4 \text{ atm}$ , donnez (application numérique) la pression en entrée  $P_1$ .
5. Si l'avion propulsé par ce turboréacteur vole à une altitude à laquelle la pression ambiante vaut  $0.5 \text{ atm}$ , que se produit-il dans l'écoulement sortant de la tuyère ?

## 12.3 Fuite dans un réservoir sous pression (examen mai 2021)

On considère un réservoir de très grande taille (volume  $V$ ) dans lequel de l'air est stocké avec une pression  $P_0$  supérieure à la pression atmosphérique et une température  $T_0$  égale à  $20^\circ \text{C}$  en équilibre thermique avec l'air à l'extérieur du réservoir. On peut par exemple imaginer que cela représente un pneu de vélo gonflé à 3 bars. La pression extérieure est la pression atmosphérique  $P_{atm} = 10^5 \text{ Pa}$ .

Un trou s'est formé dans l'enceinte du réservoir (ou bien le pneu si vous êtes un cycliste peu chanceux), avec une forme conique présentant un diamètre légèrement plus élevée du côté interne que du côté externe. On notera  $D$  le diamètre du trou du côté externe. On pourra remarquer que la forme du trou représentée dans la figure 9 ressemble à un profil de tuyère de Laval dans laquelle on aurait supprimé la partie divergente.

On s'intéresse dans ce problème à la prédiction des conditions en sortie du trou en fonction du niveau de pression dans le réservoir.

### A. Problème basse pression

On considère dans un premier temps que le réservoir est en très légère surpression,  $P_0 = 1.25 P_{atm}$ .

1. En assurant la continuité de pression pour l'écoulement dans le trou avec la pression atmosphérique à la sortie, calculer (application numérique) la valeur du nombre de Mach  $M_t$ , puis la température  $T_t$ , puis la vitesse  $u_t$  de l'écoulement au niveau de la sortie du trou.

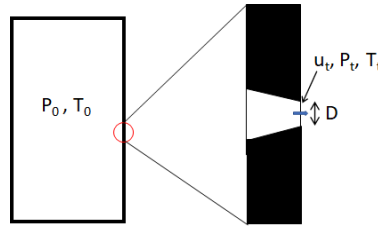


FIGURE 9 – Schéma du trou conique dans l'enceinte sous pression.

2. Dans quel régime se trouve l'écoulement ? Calculer (application numérique) le débit massique  $\dot{m}$  pour cette valeur de  $P_0 = 1.25 P_{atm}$  et un diamètre  $D = 1 \text{ mm}$ .
3. On considère maintenant des valeurs croissantes de pression  $P_0$  dans le réservoir. Exprimez le nombre de Mach  $M_t$  à la sortie du trou en fonction de la pression dans le réservoir  $P_0$  et de la pression extérieure  $P_{atm}$ . Montrer que ce nombre de Mach augmente jusqu'à une valeur critique de  $P_0$  notée  $P_0^{crit}$ . Quelle est cette valeur ? Dans quel régime se trouve alors l'écoulement à la sortie du trou ?
4. Quelle est la valeur (application numérique) du débit massique à travers un trou de diamètre  $D = 1 \text{ mm}$  pour cette valeur critique  $P_0^{crit}$  ?
5. Calculer (application numérique) le débit massique  $\dot{m}$  pour des valeurs intermédiaires  $P_0 = 1.5$  et  $1.75 P_{atm}$ .

### B. Problème haute pression

6. Si on augmente encore la pression dans le réservoir au-delà de  $P_0^{crit}$ , comment évolue la valeur du nombre de Mach  $M_t$  à la sortie du trou ? On pourra utiliser l'analogie avec une tuyère de Laval dont on aurait supprimé (ou réduit à presque rien) la partie divergente.
7. En expliquant votre démarche et l'utilisation que vous ferez du formulaire, calculer la pression à la sortie du trou  $P_t$  et le débit massique  $\dot{m}$  pour des valeurs de  $P_0$  égales à 2, 3 et 4 bars et un trou de diamètre  $D = 1 \text{ mm}$ .
8. Tracer l'évolution du débit massique  $\dot{m}$  en fonction de  $P_0$  au moyen de toutes les applications numériques des questions précédentes. Peut-on identifier un changement de régime de l'écoulement par la mesure du débit massique ?

### C. Retour à la normale...

Pour des pressions élevées du réservoir, le jet qui sort du trou a donc basculé en régime supersonique. L'écoulement au-delà du trou n'est plus limité par les parois et tend à s'étendre dans la direction transverse, ce qui représente donc l'équivalent du divergent dans une tuyère de Laval, et le retour aux conditions de pression ambiante va se faire avec des chocs. La configuration générale est bien sûr très compliquée, mais on peut imaginer que cela se fait à travers un choc droit détaché en face du trou.

9. Pour une pression de réservoir  $P_0 = 3 \text{ bars}$ , calculer (application numérique) la pression  $P_1$  dans la partie supersonique du jet pour des valeurs de Mach  $M_1 = 1.5, 2, 2.5$  et  $2.98$ .
10. Pour ces différentes valeurs de Mach  $M_1$  dans la partie supersonique du jet, calculer (application numérique) la valeur du Mach  $M_2$  et la pression  $P_2$  qui se trouverait en aval de la traversée d'un choc droit.
11. Pour un écoulement subsonique de pression génératrice  $P = 1 \text{ bar}$  mis en mouvement avec des valeurs de Mach  $M_3$  égales à 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 et 0.9, calculer (application numérique) la pression dynamique notée  $P_3$ .
12. Du coup, pour une pression de réservoir  $P_0 = 3 \text{ bars}$ , vers quelle valeur du Mach  $M_1$  dans le jet supersonique un choc droit pourrait-il se former ? On pourra donner un intervalle entourant la valeur précise.
13. Quelle est la température de l'air dans le jet redevenu subsonique après ce choc ? On pourra faire le calcul pour l'intervalle trouvé à la question précédente.